



دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

جزوه درس

توابع مختلط

استاد درس: دکتر اکبر دهقانزاد

معین دینی

بهار ۱۴۰۴

جزوه درس توابع مختلط

معین دینی دانشجوی کارشناسی ریاضیات و کاربردها

بهار ۱۴۰۴

این جزوه توسط معین دینی دانشجوی کارشناسی ریاضیات و کاربردها در بهار ۱۴۰۴
برای درس توابع مختلط با پروفسور اکبر دهقانزاد، تهیه گردیده است.
نشر با ذکر منبع، بلامانع است.



فهرست مطالب

۱. اعداد مختلط

۲۴	۱.۱ جمع و ضرب
۲۴	۱.۱.۱ تعریف اعداد مختلط
۲۵	۲.۱.۱ جمع اعداد مختلط
۲۵	۳.۱.۱ ضرب اعداد مختلط
۲۶	۴.۱.۱ ویژگی‌های اصلی
۲۷	۵.۱.۱ مثال‌های گویا
۲۷	۶.۱.۱ کاربردها
۲۷	۷.۱.۱ زمینه تاریخی
۲۸	۸.۱.۱ شهود
۳۰	۹.۱.۱ تمرین‌ها
۳۰	۱۰.۱.۱ تمرین‌های دشوارتر
۳۱	۲.۱ ویژگی‌های جبری پایه
۳۱	۱.۲.۱ تعریف اعداد مختلط
۳۱	۲.۲.۱ جابجایی

۳۲		شرکت پذیری	۲.۲.۱
۳۲		توزیع پذیری	۴.۲.۱
۳۲		هویت ها	۵.۲.۱
۳۳		معکوس ها	۶.۲.۱
۳۳		تقسیم	۷.۲.۱
۳۴		نتیجه: عدم وجود مقسوم علیه های صفر	۸.۲.۱
۳۴		مثال های گویا	۹.۲.۱
۳۴		کاربردها	۱۰.۲.۱
۳۵		زمینه تاریخی	۱۱.۲.۱
۳۵		شهود	۱۲.۲.۱
۳۸		تمرین ها	۱۳.۲.۱
۳۹		تمرین های دشوارتر	۱۴.۲.۱
۳۹		ویژگی های جبری پیشرفته	۳.۱
۴۰		تعریف اعداد مختلط	۱.۳.۱
۴۰		برابری اعداد مختلط	۲.۳.۱
۴۰		ویژگی های بخش های حقیقی و موهومی	۳.۳.۱
۴۱		شرایط برای انواع خاص	۴.۳.۱
۴۲		معرفی مزدوج های مختلط	۵.۳.۱
۴۲		مثال های گویا	۶.۳.۱
۴۳		کاربردها	۷.۳.۱
۴۳		زمینه تاریخی	۸.۳.۱
۴۳		شهود	۹.۳.۱
۴۵		تمرین ها	۱۰.۳.۱

۴۶	تمرین‌های دشوارتر	۱۱.۳.۱
۴۶	بردارها و قدر مطلق‌ها	۴.۱
۴۶	تعریف صفحه مختلط	۱.۴.۱
۴۶	بردارها در صفحه مختلط	۲.۴.۱
۴۷	قدر مطلق یک عدد مختلط	۳.۴.۱
۴۷	ویژگی‌های اصلی قدر مطلق	۴.۴.۱
۴۸	استنتاج ویژگی‌های اصلی	۵.۴.۱
۴۹	مثال‌های گویا	۶.۴.۱
۵۰	نتایج و کاربردها	۷.۴.۱
۵۰	زمینه تاریخی	۸.۴.۱
۵۱	شهود	۹.۴.۱
۵۳	تمرین‌ها	۱۰.۴.۱
۵۳	تمرین‌های دشوارتر	۱۱.۴.۱
۵۳	مزدوج‌های مختلط	۵.۱
۵۴	تعریف	۱.۵.۱
۵۴	ویژگی‌های اصلی	۲.۵.۱
۵۵	مثال‌های گویا	۳.۵.۱
۵۶	نتایج و کاربردها	۴.۵.۱
۵۷	زمینه تاریخی	۵.۵.۱
۵۷	شهود	۶.۵.۱
۶۰	تمرین‌ها	۷.۵.۱
۶۰	تمرین‌های دشوارتر	۸.۵.۱

۶۰	شکل نمایی	۶.۱
۶۱	تعریف	۱.۶.۱
۶۱	یافتن آرگومان	۲.۶.۱
۶۲	ویژگی‌های اصلی	۳.۶.۱
۶۲	مثال‌های گویا	۴.۶.۱
۶۳	کاربردها	۵.۶.۱
۶۴	زمینه تاریخی	۶.۶.۱
۶۴	شهود	۷.۶.۱
۶۵	تمرین‌ها	۸.۶.۱
۶۶	تمرین‌های دشوارتر	۹.۶.۱
۶۶	ضرب و توان در شکل نمایی	۷.۱
۶۶	تعریف و نمادگذاری	۱.۷.۱
۶۷	ضرب در شکل نمایی	۲.۷.۱
۶۸	خارج قسمت در شکل نمایی	۳.۷.۱
۶۸	توان در شکل نمایی	۴.۷.۱
۶۹	قضیه دمواور	۵.۷.۱
۶۹	مثال‌های گویا	۶.۷.۱
۷۰	نتایج و کاربردها	۷.۷.۱
۷۰	زمینه تاریخی	۸.۷.۱
۷۱	شهود	۹.۷.۱
۷۲	تمرین‌ها	۱۰.۷.۱
۷۲	تمرین‌های دشوارتر	۱۱.۷.۱

۸.۱ آرگومان‌های ضرب و خارج قسمت

۷۳		تعریف آرگومان	۱.۸.۱
۷۳		ویژگی‌های اصلی	۲.۸.۱
۷۴		استنتاج ویژگی‌ها	۳.۸.۱
۷۵		مثال‌های گویا	۴.۸.۱
۷۶		نتایج و کاربردها	۵.۸.۱
۷۷		زمینه تاریخی	۶.۸.۱
۷۸		شهود	۷.۸.۱
۷۸		تمرین‌ها	۸.۸.۱
۷۹		تمرین‌های دشوارتر	۹.۸.۱
۸۰		تمرین‌های دشوارتر	۹.۸.۱

۹.۱ ریشه‌های اعداد مختلط

۸۰		تعریف	۱.۹.۱
۸۱		استنتاج ریشه‌های n ام	۲.۹.۱
۸۱		ویژگی‌های اصلی	۳.۹.۱
۸۲		مثال‌های گویا	۴.۹.۱
۸۳		نتایج و کاربردها	۵.۹.۱
۸۴		زمینه تاریخی	۶.۹.۱
۸۵		شهود	۷.۹.۱
۸۵		تمرین‌ها	۸.۹.۱
۸۷		تمرین‌های دشوارتر	۹.۹.۱
۸۸		تمرین‌های دشوارتر	۹.۹.۱

۱۰.۱ مثال‌ها

۸۹		مثال ۱: عملیات‌های پایه	۱.۱۰.۱
۸۹			

۹۰	مثال ۲: قدر مطلق و آرگومان	۲.۱۰.۱
۹۱	مثال ۳: شکل نمایی	۳.۱۰.۱
۹۲	مثال ۴: توان در شکل نمایی	۴.۱۰.۱
۹۳	مثال ۵: ریشه‌های اعداد مختلط	۵.۱۰.۱
۹۴	مثال ۶: حل معادلات درجه دوم	۶.۱۰.۱
۹۶	نتایج و کاربردها	۷.۱۰.۱
۹۶	زمینه تاریخی	۸.۱۰.۱
۹۷	شهود	۹.۱۰.۱
۹۹	تمرین‌ها	۱۰.۱۰.۱
۱۰۰	تمرین‌های دشوارتر	۱۱.۱۰.۱
۱۰۰	مناطق در صفحه مختلط	۱۱.۱
۱۰۱	مفاهیم توپولوژیکی پایه	۱.۱۱.۱
۱۰۳	متصل بودن و نواحی	۲.۱۱.۱
۱۰۳	مناطق	۳.۱۱.۱
۱۰۳	مجموعه‌های کران‌دار و بی‌کران	۴.۱۱.۱
۱۰۴	نقاط انباشت و منفرد	۵.۱۱.۱
۱۰۴	مثال‌های گویا	۶.۱۱.۱
۱۰۶	کاربردها	۷.۱۱.۱
۱۰۶	زمینه تاریخی	۸.۱۱.۱
۱۰۶	شهود	۹.۱۱.۱
۱۱۱	تمرین‌ها	۱۰.۱۱.۱
۱۱۲	تمرین‌های دشوارتر	۱۱.۱۱.۱

توابع تحلیلی

۱۱۳

۱۱۳ ۱.۲ توابع متغیر مختلط

۱۱۳ ۱.۱.۲ تعریف

۱۱۴ ۲.۱.۲ خواص اصلی

۱۱۵ ۳.۱.۲ مثال‌های توضیحی

۱۱۶ ۴.۱.۲ کاربردها و نتایج

۱۱۶ ۵.۱.۲ زمینه تاریخی

۱۱۷ ۶.۱.۲ شهود

۱۱۹ ۷.۱.۲ تمرین‌ها

۱۱۹ ۸.۱.۲ تمرین‌های دشوارتر

۱۲۰ ۲.۲ نگاشت‌ها

۱۲۰ ۱.۲.۲ تعریف

۱۲۰ ۲.۲.۲ خواص اصلی

۱۲۱ ۳.۲.۲ مثال‌های توضیحی

۱۲۳ ۴.۲.۲ کاربردها و نتایج

۱۲۳ ۵.۲.۲ زمینه تاریخی

۱۲۳ ۶.۲.۲ شهود

۱۲۵ ۷.۲.۲ تمرین‌ها

۱۲۶ ۸.۲.۲ تمرین‌های دشوارتر

۱۲۶ ۳.۲ نگاشت‌های تابع نمایی

۱۲۶ ۱.۳.۲ تعریف

۱۲۷	خواص اصلی	۲.۳.۲
۱۲۷	نگاشت خطوط	۳.۳.۲
۱۲۸	نگاشت نواحی	۴.۳.۲
۱۲۹	مثال‌های توضیحی	۵.۳.۲
۱۲۹	کاربردها و نتایج	۶.۳.۲
۱۳۰	زمینه تاریخی	۷.۳.۲
۱۳۰	شهود	۸.۳.۲
۱۳۲	تمرین‌ها	۹.۳.۲
۱۳۲	تمرین‌های دشوارتر	۱۰.۳.۲
۱۳۳	حدود	۴.۲
۱۳۳	تعریف	۱.۴.۲
۱۳۳	خواص اصلی	۲.۴.۲
۱۳۴	مثال‌های توضیحی	۳.۴.۲
۱۳۵	کاربردها و نتایج	۴.۴.۲
۱۳۶	شهود	۵.۴.۲
۱۳۸	تمرین‌ها	۶.۴.۲
۱۳۸	تمرین‌های دشوارتر	۷.۴.۲
۱۳۸	قضیه‌های حدود	۵.۲
۱۳۹	تعریف حد	۱.۵.۲
۱۳۹	قضیه ۱: ارتباط با حدود حقیقی	۲.۵.۲
۱۴۰	قضیه ۲: خواص جبری حدود	۳.۵.۲
۱۴۱	قضیه ۳: یگانگی حدود	۴.۵.۲
۱۴۱	حدود شامل بی‌نهایت	۵.۵.۲

۱۴۲	مثال‌های توضیحی	۶.۵.۲
۱۴۲	کاربردها و نتایج	۷.۵.۲
۱۴۳	زمینه تاریخی	۸.۵.۲
۱۴۳	شهود	۹.۵.۲
۱۴۵	تمرین‌ها	۱۰.۵.۲
۱۴۶	تمرین‌های دشوارتر	۱۱.۵.۲
۱۴۶	حدود شامل نقطه در بی‌نهایت	۶.۲
۱۴۶	تعریف	۱.۶.۲
۱۴۷	خواص اصلی	۲.۶.۲
۱۴۸	مثال‌های توضیحی	۳.۶.۲
۱۴۹	کاربردها و نتایج	۴.۶.۲
۱۵۰	زمینه تاریخی	۵.۶.۲
۱۵۰	شهود	۶.۶.۲
۱۵۳	تمرین‌ها	۷.۶.۲
۱۵۳	تمرین‌های دشوارتر	۸.۶.۲
۱۵۴	پیوستگی	۷.۲
۱۵۴	تعریف	۱.۷.۲
۱۵۵	خواص اصلی	۲.۷.۲
۱۵۶	مثال‌های توضیحی	۳.۷.۲
۱۵۷	کاربردها و نتایج	۴.۷.۲
۱۵۸	زمینه تاریخی	۵.۷.۲
۱۵۸	شهود	۶.۷.۲
۱۶۰	تمرین‌ها	۷.۷.۲

۱۶۰	تمرین‌های دشوارتر	۸.۷.۲
۱۶۱	مشتقات	۸.۲
۱۶۱	تعریف	۱.۸.۲
۱۶۱	معادلات کوشی-ریمان	۲.۸.۲
۱۶۲	قوانین مشتق‌گیری	۳.۸.۲
۱۶۳	مثال‌های توضیحی	۴.۸.۲
۱۶۴	خواص مشتقات	۵.۸.۲
۱۶۵	کاربردها و نتایج	۶.۸.۲
۱۶۶	زمینه تاریخی	۷.۸.۲
۱۶۶	شهود	۸.۸.۲
۱۶۹	تمرین‌ها	۹.۸.۲
۱۷۰	تمرین‌های دشوارتر	۱۰.۸.۲
۱۷۰	فرمول‌های مشتق‌گیری	۹.۲
۱۷۰	تعریف	۱.۹.۲
۱۷۱	قوانین مشتق‌گیری	۲.۹.۲
۱۷۲	اشتقاق قوانین کلیدی	۳.۹.۲
۱۷۴	مثال‌های توضیحی	۴.۹.۲
۱۷۵	کاربردها و نتایج	۵.۹.۲
۱۷۵	زمینه تاریخی	۶.۹.۲
۱۷۶	شهود	۷.۹.۲
۱۷۹	تمرین‌ها	۸.۹.۲
۱۸۰	تمرین‌های دشوارتر	۹.۹.۲
۱۸۰	معادلات کوشی-ریمان	۱۰.۲

۱۸۰	تعریف	۱.۱۰.۲
۱۸۱	اشتقاق خواص اصلی	۲.۱۰.۲
۱۸۲	خواص اصلی	۳.۱۰.۲
۱۸۲	مثال‌های توضیحی	۴.۱۰.۲
۱۸۴	کاربردها و نتایج	۵.۱۰.۲
۱۸۵	شکل قطبی معادلات کوشی-ریمان	۶.۱۰.۲
۱۸۵	زمینه تاریخی	۷.۱۰.۲
۱۸۵	شهود	۸.۱۰.۲
۱۸۷	تمرین‌ها	۹.۱۰.۲
۱۸۸	تمرین‌های دشوارتر	۱۰.۱۰.۲
۱۸۹	شرایط کافی برای مشتق‌پذیری	۱۱.۲
۱۸۹	تعریف	۱.۱۱.۲
۱۹۰	اشتقاق خواص اصلی	۲.۱۱.۲
۱۹۱	خواص اصلی	۳.۱۱.۲
۱۹۲	مثال‌های توضیحی	۴.۱۱.۲
۱۹۳	کاربردها و نتایج	۵.۱۱.۲
۱۹۳	زمینه تاریخی	۶.۱۱.۲
۱۹۴	شهود	۷.۱۱.۲
۱۹۵	تمرین‌ها	۸.۱۱.۲
۱۹۶	تمرین‌های دشوارتر	۹.۱۱.۲
۱۹۶	مختصات قطبی	۱۲.۲
۱۹۶	تعریف	۱.۱۲.۲
۱۹۷	خواص اصلی	۲.۱۲.۲

۱۹۸	معادلات کوشی-ریمان در مختصات قطبی	۳.۱۲.۲
۱۹۹	اشتقاق معادلات کوشی-ریمان در شکل قطبی	۴.۱۲.۲
۲۰۰	مثال‌های توضیحی	۵.۱۲.۲
۲۰۱	کاربردها و نتایج	۶.۱۲.۲
۲۰۱	زمینه تاریخی	۷.۱۲.۲
۲۰۲	شهود	۸.۱۲.۲
۲۰۴	تمرین‌ها	۹.۱۲.۲
۲۰۵	تمرین‌های دشوارتر	۱۰.۱۲.۲
۲۰۵	توابع تحلیلی	۱۳.۲
۲۰۵	تعریف	۱.۱۳.۲
۲۰۶	خواص اصلی	۲.۱۳.۲
۲۰۷	اشتقاق خواص کلیدی	۳.۱۳.۲
۲۰۸	مثال‌های توضیحی	۴.۱۳.۲
۲۰۹	کاربردها و نتایج	۵.۱۳.۲
۲۱۰	زمینه تاریخی	۶.۱۳.۲
۲۱۰	شهود	۷.۱۳.۲
۲۱۲	تمرین‌ها	۸.۱۳.۲
۲۱۳	تمرین‌های دشوارتر	۹.۱۳.۲
۲۱۴	مثال‌های توابع تحلیلی	۱۴.۲
۲۱۴	تعریف	۱.۱۴.۲
۲۱۴	خواص اصلی	۲.۱۴.۲
۲۱۶	اشتقاق خواص	۳.۱۴.۲
۲۱۷	مثال‌های توضیحی	۴.۱۴.۲

۲۱۸	کاربردها و نتایج	۵.۱۴.۲
۲۱۹	زمینه تاریخی	۶.۱۴.۲
۲۲۰	شهود	۷.۱۴.۲
۲۲۱	تمرین‌ها	۸.۱۴.۲
۲۲۲	تمرین‌های دشوارتر	۹.۱۴.۲
۲۲۲	توابع هارمونیک	۱۵.۲
۲۲۲	تعریف	۱.۱۵.۲
۲۲۳	رابطه با توابع تحلیلی	۲.۱۵.۲
۲۲۳	خواص اصلی	۳.۱۵.۲
۲۲۴	یافتن مزدوج هارمونیک	۴.۱۵.۲
۲۲۵	مثال‌های توضیحی	۵.۱۵.۲
۲۲۷	کاربردها و نتایج	۶.۱۵.۲
۲۲۷	زمینه تاریخی	۷.۱۵.۲
۲۲۸	شهود	۸.۱۵.۲
۲۳۰	تمرین‌ها	۹.۱۵.۲
۲۳۱	تمرین‌های دشوارتر	۱۰.۱۵.۲
۲۳۲	توابع تحلیلی یکتا تعیین شده	۱۶.۲
۲۳۲	تعریف	۱.۱۶.۲
۲۳۲	خواص اصلی	۲.۱۶.۲
۲۳۳	اشتقاق قضیه هویت	۳.۱۶.۲
۲۳۴	مثال‌های توضیحی	۴.۱۶.۲
۲۳۵	کاربردها و نتایج	۵.۱۶.۲

۲۳۵	زمینه تاریخی	۶.۱۶.۲
۲۳۶	شهود	۷.۱۶.۲
۲۳۸	تمرین‌ها	۸.۱۶.۲
۲۳۹	تمرین‌های دشوارتر	۹.۱۶.۲
۲۳۹	اصل انعکاس	۱۷.۲
۲۳۹	تعریف	۱.۱۷.۲
۲۴۰	خواص اصلی	۲.۱۷.۲
۲۴۱	اشتقاق اصل	۳.۱۷.۲
۲۴۲	مثال‌های توضیحی	۴.۱۷.۲
۲۴۳	کاربردها و نتایج فرعی	۵.۱۷.۲
۲۴۴	زمینه تاریخی	۶.۱۷.۲
۲۴۴	شهود	۷.۱۷.۲
۲۴۶	تمرین‌ها	۸.۱۷.۲
۲۴۷	تمرین‌های دشوارتر	۹.۱۷.۲

۳. توابع اولیه

۲۴۸	تابع نمایی	۱.۳
۲۴۸	تعریف	۱.۱.۳
۲۴۹	ویژگی‌ها	۲.۱.۳
۲۵۰	مثال‌های گویا	۳.۱.۳
۲۵۱	کاربردها و نتایج	۴.۱.۳
۲۵۱	زمینه تاریخی	۵.۱.۳

۲۵۲	شهود	۶.۱.۳
۲۵۳	تمرین‌ها	۷.۱.۳
۲۵۴	تمرین‌های دشوارتر	۸.۱.۳
۲۵۴	تابع لگاریتمی	۲.۳
۲۵۵	تعریف	۱.۲.۳
۲۵۵	ویژگی‌ها	۲.۲.۳
۲۵۷	مثال‌های گویا	۳.۲.۳
۲۵۸	کاربردها و نتایج	۴.۲.۳
۲۵۹	زمینه تاریخی	۵.۲.۳
۲۵۹	شهود	۶.۲.۳
۲۶۱	تمرین‌ها	۷.۲.۳
۲۶۲	تمرین‌های دشوارتر	۸.۲.۳
۲۶۲	شاخه‌ها و مشتقات لگاریتم‌ها	۳.۳
۲۶۲	تعریف لگاریتم چند مقداری	۱.۳.۳
۲۶۳	شاخه‌های لگاریتم	۲.۳.۳
۲۶۳	مشتقات شاخه‌های لگاریتمی	۳.۳.۳
۲۶۴	مثال‌های گویا	۴.۳.۳
۲۶۵	کاربردها و نتایج	۵.۳.۳
۲۶۵	زمینه تاریخی	۶.۳.۳
۲۶۶	شهود	۷.۳.۳
۲۶۷	تمرین‌ها	۸.۳.۳
۲۶۸	تمرین‌های دشوارتر	۹.۳.۳

۴.۳	برخی هویت‌های مربوط به لگاریتم‌ها	۲۶۸
۱.۴.۳	تعاریف	۲۶۹
۲.۴.۳	هویت‌های کلیدی	۲۶۹
۳.۴.۳	استنتاج هویت‌های کلیدی	۲۷۱
۴.۴.۳	مثال‌های گویا	۲۷۲
۵.۴.۳	کاربردها و نتایج	۲۷۳
۶.۴.۳	زمینه تاریخی	۲۷۳
۷.۴.۳	شهود	۲۷۳
۸.۴.۳	تمرین‌ها	۲۷۴
۹.۴.۳	تمرین‌های دشوارتر	۲۷۵
۵.۳	توان‌های مختلط	۲۷۵
۱.۵.۳	تعریف	۲۷۵
۲.۵.۳	ویژگی‌ها	۲۷۶
۳.۵.۳	مثال‌های گویا	۲۷۷
۴.۵.۳	کاربردها و نتایج	۲۷۸
۵.۵.۳	زمینه تاریخی	۲۷۹
۶.۵.۳	شهود	۲۷۹
۷.۵.۳	تمرین‌ها	۲۸۰
۸.۵.۳	تمرین‌های دشوارتر	۲۸۱
۶.۳	توابع مثلثاتی	۲۸۱
۱.۶.۳	تعاریف	۲۸۱
۲.۶.۳	ویژگی‌های اصلی	۲۸۲

۲۸۴	مثال‌های گویا	۳.۶.۳
۲۸۶	کاربردها و نتایج	۴.۶.۳
۲۸۶	زمینه تاریخی	۵.۶.۳
۲۸۷	شهود	۶.۶.۳
۲۹۰	تمرین‌ها	۷.۶.۳
۲۹۱	تمرین‌های دشوارتر	۸.۶.۳
۲۹۱	توابع هذلولی	۷.۳
۲۹۲	تعاریف	۱.۷.۳
۲۹۳	ویژگی‌های اصلی	۲.۷.۳
۲۹۵	مثال‌های گویا	۳.۷.۳
۲۹۶	کاربردها و نتایج	۴.۷.۳
۲۹۶	زمینه تاریخی	۵.۷.۳
۲۹۷	شهود	۶.۷.۳
۲۹۹	تمرین‌ها	۷.۷.۳
۳۰۰	تمرین‌های دشوارتر	۸.۷.۳
۳۰۰	توابع معکوس مثلثاتی و هذلولی	۸.۳
۳۰۰	تعاریف	۱.۸.۳
۳۰۲	ویژگی‌های اصلی	۲.۸.۳
۳۰۴	مثال‌های گویا	۳.۸.۳
۳۰۵	کاربردها و نتایج	۴.۸.۳
۳۰۵	زمینه تاریخی	۵.۸.۳
۳۰۶	شهود	۶.۸.۳

۳۰۷	تمرین‌ها	۷.۸.۳
۳۰۸	تمرین‌های دشوارتر	۸.۸.۳

گاشت توسط تبدیلات خطی

۳۰۹	تبدیلات خطی	۱.۴
۳۰۹	تعریف	۱.۱.۴
۳۱۰	ویژگی‌های اصلی	۲.۱.۴
۳۱۱	تفسیر هندسی	۳.۱.۴
۳۱۲	مثال‌های گویا	۴.۱.۴
۳۱۳	کاربردها و نتایج	۵.۱.۴
۳۱۴	زمینه تاریخی	۶.۱.۴
۳۱۴	شهود	۷.۱.۴
۳۲۰	تمرین‌ها	۸.۱.۴
۳۲۱	تمرین‌های دشوارتر	۹.۱.۴
۳۲۱	تبدیل $w = \frac{1}{z}$	۲.۴
۳۲۱	تعریف	۱.۲.۴
۳۲۱	ویژگی‌های اصلی	۲.۲.۴
۳۲۳	تفسیر هندسی	۳.۲.۴
۳۲۴	مثال‌های گویا	۴.۲.۴
۳۲۵	کاربردها و نتایج	۵.۲.۴
۳۲۶	زمینه تاریخی	۶.۲.۴
۳۲۶	شهود	۷.۲.۴

۳۲۹	تمرین‌ها	۸.۲.۴
۳۳۰	تمرین‌های دشوارتر	۹.۲.۴
۳۳۱	نگاشت‌ها توسط $w = \frac{1}{z}$	۳.۴
۳۳۱	تعریف	۱.۳.۴
۳۳۱	ویژگی‌های اصلی	۲.۳.۴
۳۳۳	تفسیر هندسی	۳.۳.۴
۳۳۳	روش کلی برای نگاشت	۴.۳.۴
۳۳۳	مثال‌های گویا	۵.۳.۴
۳۳۴	کاربردها و نتایج	۶.۳.۴
۳۳۵	زمینه تاریخی	۷.۳.۴
۳۳۵	شهود	۸.۳.۴
۳۳۹	تمرین‌ها	۹.۳.۴
۳۴۰	تمرین‌های دشوارتر	۱۰.۳.۴
۳۴۰	تبدیلات خطی کسری	۴.۴
۳۴۰	تعریف	۱.۴.۴
۳۴۱	ویژگی‌های اصلی	۲.۴.۴
۳۴۲	تفسیر هندسی	۳.۴.۴
۳۴۳	مثال‌های گویا	۴.۴.۴
۳۴۴	کاربردها و نتایج	۵.۴.۴
۳۴۵	زمینه تاریخی	۶.۴.۴
۳۴۵	شهود	۷.۴.۴
۳۴۸	تمرین‌ها	۸.۴.۴
۳۵۰	تمرین‌های دشوارتر	۹.۴.۴

۳۵۰	یک شکل ضمنی	۵.۴
۳۵۰	تعریف	۱.۵.۴
۳۵۱	قضیه تابع ضمنی	۲.۵.۴
۳۵۱	ویژگی‌های اصلی	۳.۵.۴
۳۵۲	تفسیر هندسی	۴.۵.۴
۳۵۲	مثال‌های گویا	۵.۵.۴
۳۵۳	کاربردها و نتایج	۶.۵.۴
۳۵۴	زمینه تاریخی	۷.۵.۴
۳۵۴	شهود	۸.۵.۴
۳۵۶	تمرین‌ها	۹.۵.۴
۳۵۸	تمرین‌های دشوارتر	۱۰.۵.۴
۳۵۸	نگاشت‌های نیمه صفحه بالایی	۶.۴
۳۵۸	تعریف	۱.۶.۴
۳۵۹	ویژگی‌های اصلی	۲.۶.۴
۳۶۰	استخراج نگاشت‌های کلیدی	۳.۶.۴
۳۶۱	مثال‌های گویا	۴.۶.۴
۳۶۲	کاربردها و نتایج	۵.۶.۴
۳۶۳	زمینه تاریخی	۶.۶.۴
۳۶۳	شهود	۷.۶.۴
۳۶۵	تمرین‌ها	۸.۶.۴
۳۶۶	تمرین‌های دشوارتر	۹.۶.۴
۳۶۶	تبدیل $w = \sin z$	۷.۴
۳۶۶	تعریف	۱.۷.۴

۳۶۷	ویژگی‌های اصلی	۲.۷.۴
۳۶۹	استخراج نگاشت‌های کلیدی	۳.۷.۴
۳۷۰	مثال‌های گویا	۴.۷.۴
۳۷۲	کاربردها و نتایج	۵.۷.۴
۳۷۲	زمینه تاریخی	۶.۷.۴
۳۷۳	شهود	۷.۷.۴
۳۷۴	تمرین‌ها	۸.۷.۴
۳۷۵	تمرین‌های دشوارتر	۹.۷.۴
۳۷۶	نگاشت‌ها توسط z^2 و شاخه‌های $z^{1/2}$	۸.۴
۳۷۶	تعریف $w = z^2$	۱.۸.۴
۳۷۶	ویژگی‌های $w = z^2$	۲.۸.۴
۳۷۷	تفسیر هندسی $w = z^2$	۳.۸.۴
۳۷۸	تعریف $w = z^{1/2}$	۴.۸.۴
۳۷۸	شاخه‌های $z^{1/2}$	۵.۸.۴
۳۷۹	ویژگی‌های $w = z^{1/2}$	۶.۸.۴
۳۸۰	تفسیر هندسی $w = z^{1/2}$	۷.۸.۴
۳۸۰	مثال‌های گویا	۸.۸.۴
۳۸۱	کاربردها و نتایج	۹.۸.۴
۳۸۲	زمینه تاریخی	۱۰.۸.۴
۳۸۲	شهود	۱۱.۸.۴
۳۸۷	تمرینات	۱۲.۸.۴
۳۸۸	تمرینات دشوارتر	۱۳.۸.۴

۳۸۸	 جذر دوم چند جمله‌ای‌ها	۹.۴
۳۸۸	 تعریف	۱.۹.۴
۳۸۹	 ویژگی‌های اصلی	۲.۹.۴
۳۹۰	 استخراج ویژگی‌های کلیدی	۳.۹.۴
۳۹۰	 مثال‌های گویا	۴.۹.۴
۳۹۲	 کاربردها و نتایج	۵.۹.۴
۳۹۳	 زمینه تاریخی	۶.۹.۴
۳۹۳	 شهود	۷.۹.۴
۳۹۵	 تمرین‌ها	۸.۹.۴
۳۹۶	 تمرین‌های دشوارتر	۹.۹.۴
۳۹۷	 سطوح ریمان	۱۰.۴
۳۹۷	 تعریف	۱.۱۰.۴
۳۹۸	 ویژگی‌های اصلی	۲.۱۰.۴
۳۹۹	 استخراج ویژگی‌های کلیدی	۳.۱۰.۴
۴۰۰	 مثال‌های گویا	۴.۱۰.۴
۴۰۱	 کاربردها و نتایج	۵.۱۰.۴
۴۰۱	 زمینه تاریخی	۶.۱۰.۴
۴۰۲	 شهود	۷.۱۰.۴
۴۰۴	 تمرین‌ها	۸.۱۰.۴
۴۰۴	 تمرین‌های دشوارتر	۹.۱۰.۴
۴۰۵	 سطوح ریمان برای توابع مرتبط	۱۱.۴
۴۰۵	 تعریف	۱.۱۱.۴

۴۰۵		ساخت سطوح ریمان ۲.۱۱.۴
۴۰۶		ویژگی‌های اصلی ۳.۱۱.۴
۴۰۷		استخراج ویژگی‌های کلیدی ۴.۱۱.۴
۴۰۸		مثال‌های گویا ۵.۱۱.۴
۴۰۹		کاربردها و نتایج ۶.۱۱.۴
۴۱۰		زمینه تاریخی ۷.۱۱.۴
۴۱۱		شهود ۸.۱۱.۴
۴۱۳		تمرین‌ها ۹.۱۱.۴
۴۱۴		تمرین‌های دشوارتر ۱۰.۱۱.۴

منابع ۵

فصل ۱

اعداد مختلط

۱.۱ جمع و ضرب

۱.۱.۱ تعریف اعداد مختلط

عدد مختلط یک جفت مرتب از اعداد حقیقی است که به صورت $z = (x, y)$ نمایش داده می‌شود، که در آن x و y اعداد حقیقی هستند که به ترتیب بخش حقیقی ($\operatorname{Re} z = x$) و بخش موهومی ($\operatorname{Im} z = y$) را نشان می‌دهند. در شکل استاندارد، به صورت $z = x + iy$ نوشته می‌شود، که در آن i واحد موهومی است که $i^2 = -1$ را برآورده می‌کند. در مهندسی، گاهی i با j جایگزین می‌شود، اما ویژگی‌های جبری یکسان باقی می‌مانند.

۱.۱ جمع و ضرب

۲.۱.۱ جمع اعداد مختلط

برای دو عدد مختلط $z_1 = (x_1, y_1)$ و $z_2 = (x_2, y_2)$ ، جمع به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

در شکل استاندارد:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

این عملیات بخش‌های حقیقی و موهومی را به طور جداگانه جمع می‌کند، مشابه جمع بردارها در صفحه مختلط.

۳.۱.۱ ضرب اعداد مختلط

برای همان z_1 و z_2 ، ضرب به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

در شکل استاندارد، این به صورت زیر است:

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + ix_1 y_2 + iy_1 x_2 + i^2 y_1 y_2$$

از آنجا که $i^2 = -1$ ، این عبارت به:

$$(x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

۱.۱ جمع و ضرب

ساده می‌شود. بخش حقیقی ضرب $x_1x_2 - y_1y_2$ و بخش موهومی $x_1y_2 + y_1x_2$ است.

۴.۱.۱ ویژگی‌های اصلی

ویژگی‌های جبری کلیدی عبارتند از:

• جابجایی‌پذیری: جمع و ضرب جابجایی‌پذیر هستند، یعنی:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad \text{و} \quad z_1 z_2 = z_2 z_1$$

• تجمعی بودن: جمع و ضرب تجمعی هستند:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \quad \text{و} \quad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

• توزیعی بودن: ضرب بر جمع توزیع می‌شود:

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

• هویت‌ها: هویت جمع $0 = (0, 0)$ است، به طوری که $z + 0 = z$. هویت ضرب $1 = (1, 0)$ است، به طوری که $z \cdot 1 = z$.

این ویژگی‌ها تضمین می‌کنند که اعداد مختلط یک میدان تشکیل می‌دهند، ساختاری حیاتی برای کاربردهای پیشرفته ریاضی.

۱.۱ جمع و ضرب

۵.۱.۱ مثال‌های گویا

برای روشن شدن این عملیات‌ها، مثال‌های زیر ارائه شده‌اند:

۱. جمع: فرض کنید $z_1 = 3 + 4i$ و $z_2 = 1 - 2i$. آنگاه:

$$z_1 + z_2 = (3 + 1) + (4 - 2)i = 4 + 2i$$

۲. ضرب: با همان z_1 و z_2 :

$$z_1 z_2 = (3 \cdot 1 - 4 \cdot (-2), 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 1) = (3 + 8, -6 + 4) = (11, -2) = 11 - 2i$$

به طور جایگزین:

$$(3 + 4i)(1 - 2i) = 3 - 6i + 4i - 8i^2 = 3 - 2i + 8 = 11 - 2i$$

۶.۱.۱ کاربردها

عملیات جمع و ضرب در زمینه‌هایی مانند مهندسی برق (مدلسازی مدارهای جریان متناوب) و پردازش سیگنال، که در آن‌ها ترکیب امپدانس‌ها و تغییرات فاز را تو.....

۷.۱.۱ زمینه تاریخی

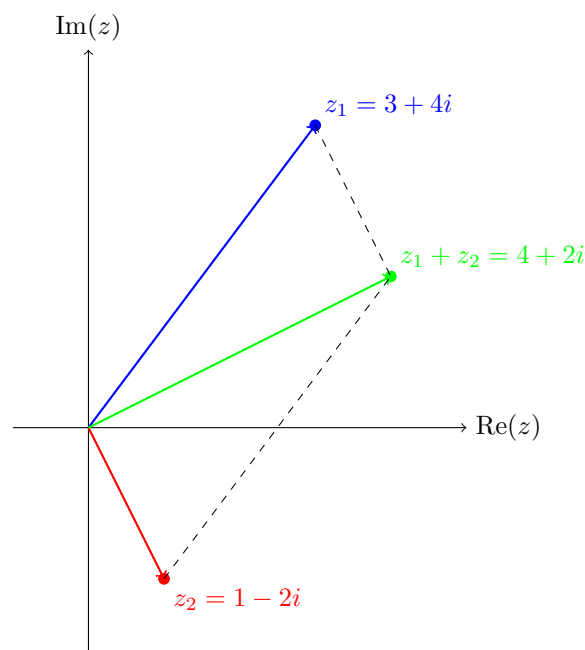
اعداد مختلط در قرن شانزدهم برای حل معادلاتی مانند $x^2 + 1 = 0$ پدید آمدند، با مشارکت‌های اولیه کاردانو و بومبلی. تا اواخر قرن هجدهم و اوایل قرن نوزدهم، ووسل، آرگاند و گاوس تفسیر

۱.۱ جمع و ضرب

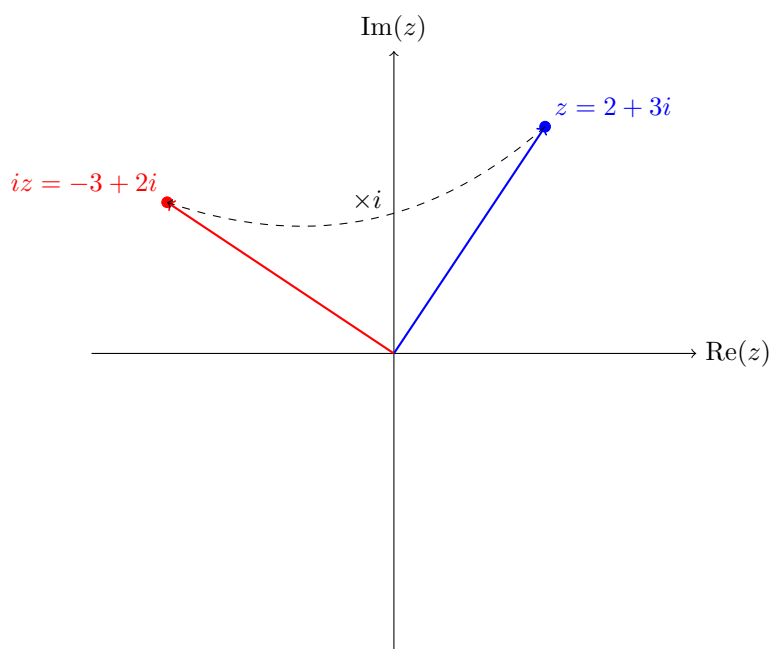
هندسی اعداد مختلط را به عنوان نقاط در یک صفحه توسعه دادند و ویژگی‌های جبری و هندسی آنها را رسمی کردند.

۸.۱.۱ شهود

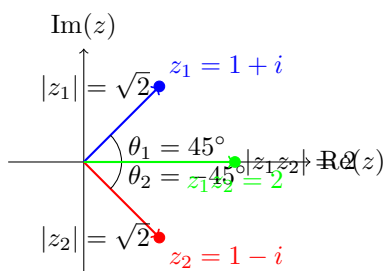
صفحه مختلط را به عنوان یک سیستم مختصات دوبعدی تصور کنید، که محور افقی بخش حقیقی و محور عمودی بخش موهومی را نشان می‌دهد. عدد مختلط $z = x + iy$ نقطه‌ای در (x, y) است. جمع اعداد مختلط مشابه جمع بردارها است، که نقطه‌ای جدید در $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ ایجاد می‌کند. ضرب شامل مقیاس‌بندی و چرخش در صفحه مختلط است، به عنوان مثال، ضرب در i نقطه را 90° در جهت پادساعت‌گرد می‌چرخاند.



شکل ۱.۱: نمایش جمع دو عدد مختلط $z_1 = 3 + 4i$ و $z_2 = 1 - 2i$ در صفحه مختلط. جمع $z_1 + z_2 = 4 + 2i$ از طریق جمع برداری به دست می‌آید و یک متوازی‌الضلاع تشکیل می‌دهد، که خاصیت جابجایی و شرکت‌پذیری جمع را نشان می‌دهد.



شکل ۲.۱: ضرب در i در صفحه مختلط. نقطه $z = 2 + 3i$ به اندازه 90° در جهت خلاف عقربه‌های ساعت چرخانده می‌شود و به $iz = -3 + 2i$ می‌رسد، که به صورت $i(x + iy) = -y + ix$ محاسبه می‌شود.



شکل ۳.۱: نمایش ضرب دو عدد مختلط $z_1 = 1 + i$ و $z_2 = 1 - i$. حاصل ضرب $z_1 z_2 = 2$ دارای اندازه $|z_1||z_2| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ و آرگومان $\theta_1 + \theta_2 = 45^\circ - 45^\circ = 0^\circ$ است، که خاصیت جابجایی ضرب را نشان می‌دهد.

۱.۱ جمع و ضرب

۹.۱.۱ تمرین‌ها

تمرین‌های زیر برای تقویت درک ارائه شده‌اند:

۱. محاسبه جمع و ضرب $z_1 = 2 + 3i$ و $z_2 = 4 - i$. پاسخ:

• جمع: $(2 + 4) + (3 - 1)i = 6 + 2i$

• ضرب: $(2 \cdot 4 - 3 \cdot (-1), 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4) = (8 + 3, -2 + 12) = 11 + 10i$

۲. تأیید کنید که $(1 + i)^2 = 2i$. پاسخ: $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$

۳. بخش‌های حقیقی و موهومی $(3 - 2i)(1 + 4i)$ را بیابید. پاسخ: $(3 - 2i)(1 + 4i) =$

$3 + 12i - 2i - 8i^2 = 3 + 10i + 8 = 11 + 10i$ ، بخش حقیقی: ۱۱، بخش موهومی: ۱۰.

۱۰.۱.۱ تمرین‌های دشوارتر

برای به چالش کشیدن یادگیرندگان پیشرفته:

۱. اثبات کنید که مجموعه اعداد مختلط یک میدان را تحت جمع و ضرب تشکیل می‌دهد.

۲. نشان دهید که قدر مطلق ضرب دو عدد مختلط برابر با ضرب قدر مطلق‌های آن‌هاست، یعنی

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

۲.۱ ویژگی‌های جبری پایه

۲.۱ ویژگی‌های جبری پایه

اعداد مختلط، که با $\mathbb{C}$ نشان داده می‌شوند، یک میدان را تحت عملیات جمع و ضرب تشکیل می‌دهند و مجموعه‌ای از ویژگی‌های جبری بنیادی را برآورده می‌کنند که منعکس‌کننده و گسترش‌دهنده ویژگی‌های اعداد حقیقی هستند. این ویژگی‌ها در زیر شرح داده شده‌اند.

۱.۲.۱ تعریف اعداد مختلط

عدد مختلط به صورت $z = x + iy$ بیان می‌شود، که در آن $x, y \in \mathbb{R}$ به ترتیب بخش‌های حقیقی و موهومی هستند و i واحد موهومی است که $i^2 = -1$ را برآورده می‌کند. مجموعه $\mathbb{C}$ با عملیات جمع و ضرب مجهز است که در زیرموضوع اول تعریف شده‌اند.

۲.۲.۱ جابجایی

برای هر اعداد مختلط $z_1 = x_1 + iy_1$ ، $z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$:

• جمع: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

• ضرب: $z_1 z_2 = z_2 z_1$.

استنتاج برای جمع:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) = (x_2 + x_1) + i(y_2 + y_1) = z_2 + z_1$$

زیرا اعداد حقیقی x_1, x_2, y_1, y_2 تحت جمع جابجایی‌پذیر هستند.

۲.۱ ویژگی‌های جبری پایه

۳.۲.۱ شرکت‌پذیری

برای هر اعداد مختلط $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$:

• جمع: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

• ضرب: $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$.

این ویژگی‌ها از شرکت‌پذیری جمع و ضرب اعداد حقیقی، که به صورت جزء به جزء اعمال می‌شود، ناشی می‌شوند.

۴.۲.۱ توزیع‌پذیری

برای هر اعداد مختلط $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$:

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

این ویژگی تضمین می‌کند که ضرب بر جمع توزیع می‌شود، که سنگ بنای دستکاری‌های جبری است.

۵.۲.۱ هویت‌ها

هویت‌های یکتا در $\mathbb{C}$ وجود دارند:

• هویت جمع: $0 = 0 + i0$ ، به طوری که $z + 0 = z$ برای هر $z \in \mathbb{C}$.

• هویت ضرب: $1 = 1 + i0$ ، به طوری که $z \cdot 1 = z$ برای هر $z \in \mathbb{C}$.

۲.۱ ویژگی‌های جبری پایه

علاوه بر این، $z \cdot 0 = 0$ برای هر $z \in \mathbb{C}$.

۶.۲.۱ معکوس‌ها

برای هر عدد مختلط، معکوس‌هایی وجود دارند:

• **معکوس جمع:** برای هر $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ، معکوس $-z = -x - iy \in \mathbb{C}$ وجود دارد به طوری که $z + (-z) = 0$.

• **معکوس ضرب:** برای هر $z \in \mathbb{C}$ ، $z \neq 0$ ، معکوس $z^{-1} \in \mathbb{C}$ وجود دارد به طوری که $z \cdot z^{-1} = 1$.

استنتاج معکوس ضرب: برای $z = x + iy \neq 0$ ، معکوس به صورت زیر است:

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

که در آن $\bar{z} = x - iy$ مزدوج مختلط و $|z|^2 = x^2 + y^2$ است. تأیید:

$$zz^{-1} = (x + iy) \left(\frac{x - iy}{x^2 + y^2} \right) = \frac{(x + iy)(x - iy)}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1$$

۷.۲.۱ تقسیم

تقسیم به صورت $\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}$ برای $z_2 \neq 0$ تعریف می‌شود. برای $z_1 = x_1 + iy_1$ ، $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

۲.۱ ویژگی‌های جبری پایه

۸.۲.۱ نتیجه: عدم وجود مقسوم‌علیه‌های صفر

اگر $z_1 z_2 = 0$ ، آنگاه $z_1 = 0$ یا $z_2 = 0$. این ویژگی، که به عنوان عدم وجود مقسوم‌علیه‌های صفر شناخته می‌شود، تضمین می‌کند که $\mathbb{C}$ یک حوزه کامل است، ویژگی‌ای حیاتی برای یک میدان.

۹.۲.۱ مثال‌های گویا

فرض کنید $z_1 = 2 + 3i$ ، $z_2 = 1 - i$:

- جمع: $z_1 + z_2 = (2 + 1) + (3 - 1)i = 3 + 2i$
- ضرب: $z_1 z_2 = (2)(1) + (2)(-i) + (3i)(1) + (3i)(-i) = 2 - 2i + 3i - 3i^2 = 5 + i$
- معکوس ضرب z_2 : $z_2^{-1} = \frac{1-i}{1^2+(-1)^2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$
- تقسیم: $\frac{z_1}{z_2} = (2 + 3i) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 1 + i + \frac{3}{2}i - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$

۱۰.۲.۱ کاربردها

این ویژگی‌ها تحلیل مختلط را پشتیبانی می‌کنند و امکان گسترش تکنیک‌های جبری برای حل معادلات در فیزیک، مهندسی و پردازش سیگنال را فراهم می‌کنند. به عنوان مثال، در مهندسی برق، این ویژگی‌ها برای تحلیل مدارهای جریان متناوب و تغییرات فاز ضروری هستند.

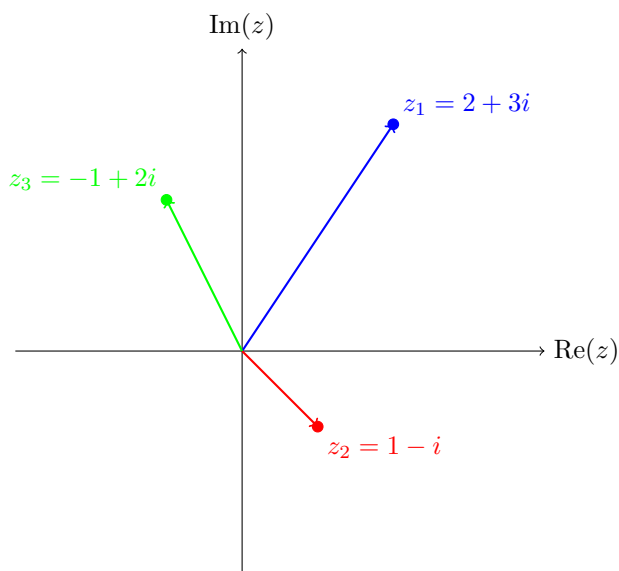
۲.۱ ویژگی‌های جبری پایه

۱۱.۲.۱ زمینه تاریخی

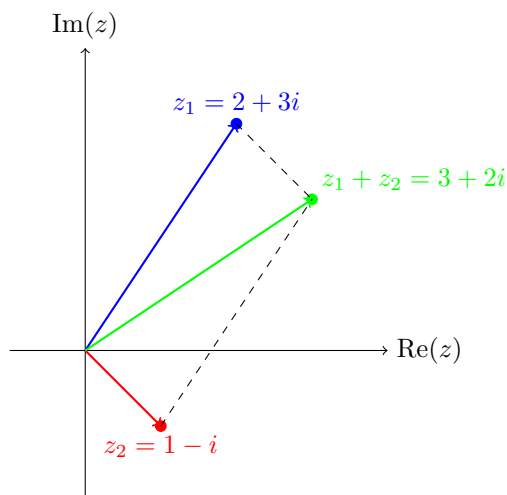
اعداد مختلط در قرن شانزدهم برای حل معادلاتی مانند $x^2 + 1 = 0$ پدید آمدند، با مشارکت‌های کاردانو و بومبلی. در قرن‌های هجدهم و نوزدهم، اوایلر، گاوس و کوشی ویژگی‌های جبری آن‌ها را رسمی کردند و تفسیرهای هندسی ارائه دادند که جایگاه آن‌ها را در ریاضیات تثبیت کرد.

۱۲.۲.۱ شهود

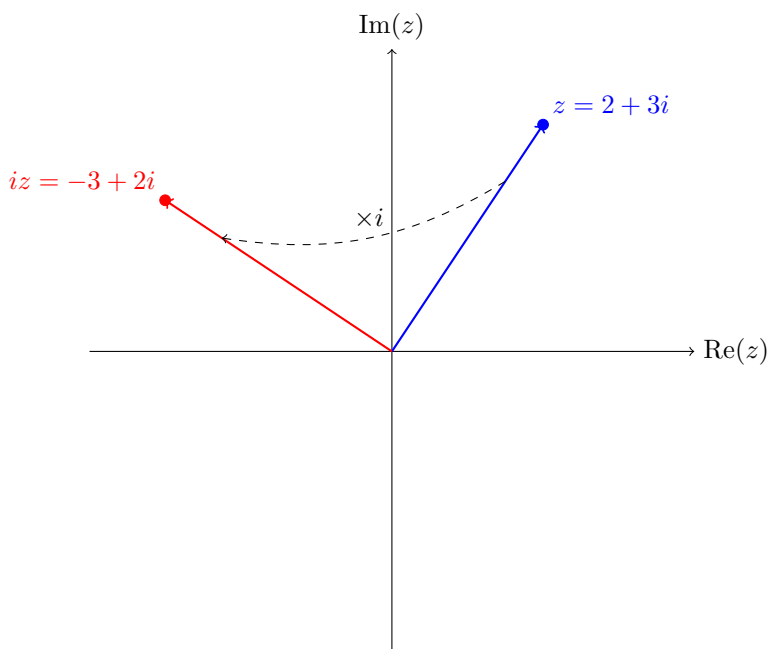
صفحه مختلط را به عنوان بوم دوبعدی تصور کنید، با محور افقی برای بخش‌های حقیقی و محور عمودی برای بخش‌های موهومی. جمع اعداد مختلط مشابه جمع بردارها است، که مختصات را ترکیب می‌کند. ضرب، که در اینجا جبری است، به مقیاس‌بندی و چرخش اشاره دارد، که در بخش‌های بعدی (مانند شکل قطبی) کاملاً بررسی می‌شود. به عنوان مثال، ضرب در i نقطه را 90° درجه در جهت پادساعت‌گرد می‌چرخاند.



شکل ۴.۱: نمایش اعداد مختلط در صفحه مختلط. هر عدد مختلط $z = x + iy$ به صورت نقطه (x, y) رسم می‌شود، با یک بردار از مبدا به آن نقطه.

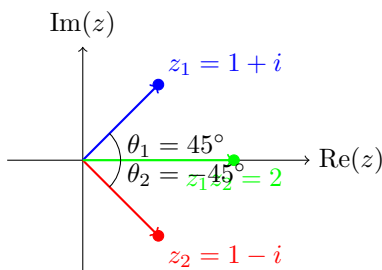


شکل ۵.۱: جمع اعداد مختلط $z_1 = 2 + 3i$ و $z_2 = 1 - i$ منجر به $z_1 + z_2 = 3 + 2i$ می‌شود. جمع از طریق جمع برداری به دست می‌آید و یک متوازی‌الضلاع در صفحه مختلط تشکیل می‌دهد. این خاصیت جابجایی را نشان می‌دهد زیرا $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

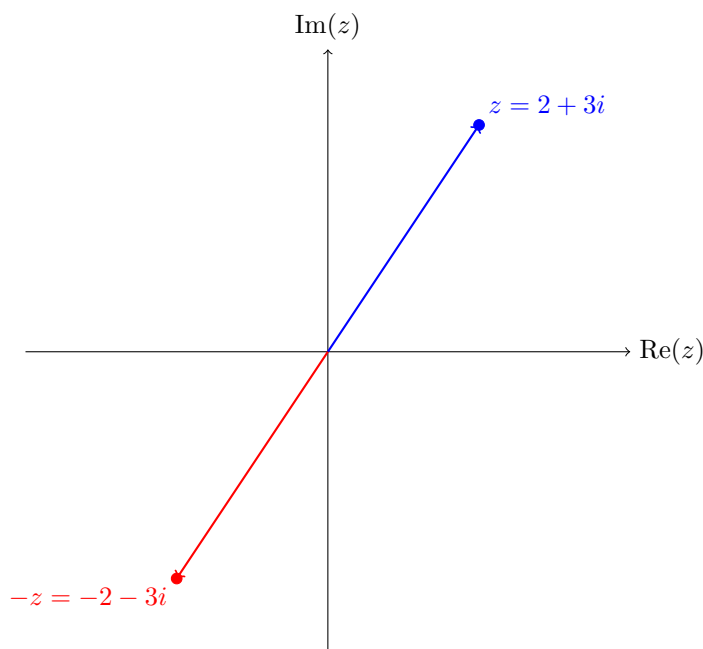


شکل ۶.۱: ضرب در i یک عدد مختلط را ۹۰ درجه در جهت خلاف عقربه‌های ساعت می‌چرخاند. برای $z = 2 + 3i$ ، داریم $iz = i(2 + 3i) = -3 + 2i$. پیکان خط چین چرخش از z به iz را نشان می‌دهد.

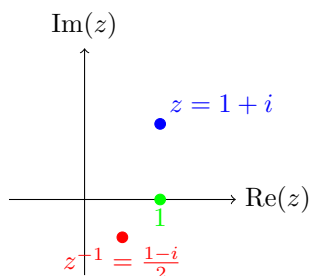
۲.۱ ویژگی‌های جبری پایه



شکل ۷.۱: حاصل ضرب $z_1 = 1 + i$ و $z_2 = 1 - i$ برابر است با $z_1 z_2 = 2$. اندازه‌ها $|z_1| = |z_2| = \sqrt{2}$ هستند، بنابراین $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| = 2$ و آرگومان‌ها $\theta_1 = 45^\circ$ ، $\theta_2 = -45^\circ$ هستند، بنابراین $\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 = 0^\circ$ که حاصل ضرب را روی محور حقیقی قرار می‌دهد. این همچنین خاصیت جابجایی ضرب را نشان می‌دهد زیرا $z_1 z_2 = z_2 z_1$.

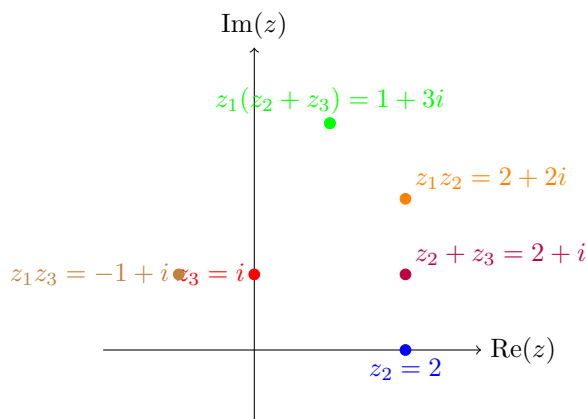


شکل ۸.۱: معکوس جمع $z = 2 + 3i$ برابر است با $-z = -2 - 3i$. در صفحه مختلط، $-z$ بازتاب z نسبت به مبدا است. جمع آن‌ها $z + (-z) = 0$ است.



شکل ۹.۱: معکوس ضرب $z = 1 + i$ برابر است با $z^{-1} = \frac{1-i}{2}$. حاصل ضرب آن‌ها $z \cdot z^{-1} = 1$ است، که با نقطه $(1, 0)$ نشان داده شده است.

۲.۱ ویژگی‌های جبری پایه



شکل ۱۰.۱: نمایش خاصیت توزیع پذیری: برای $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2$, $z_3 = i$, هر دو $z_1(z_2 + z_3)$ و $z_1z_2 + z_1z_3$ برابر با $1 + 3i$ هستند. نقاط $z_2 + z_3$, z_2 , z_3 ، z_1z_2 ، z_1z_3 و نتیجه $1 + 3i$ رسم شده‌اند. خاصیت شرکت پذیری برای جمع و ضرب برقرار است و عملیات جبری سازگار را تضمین می‌کند.

۱۳.۲.۱ تمرین‌ها

تمرین‌های زیر درک ویژگی‌ها را تقویت می‌کنند:

۱. یگانگی هویت جمع در $\mathbb{C}$ را اثبات کنید. پاسخ: فرض کنید $w \in \mathbb{C}$ هویت جمع دیگری است، به طوری که $z + w = z$ برای هر $z \in \mathbb{C}$. با قرار دادن $z = 0$ ، داریم $0 + w = 0$ ، بنابراین $w = 0$. پس هویت جمع یکتاست.

۲. نمایش دهید که $z \cdot 0 = 0$ برای هر $z \in \mathbb{C}$. پاسخ: فرض کنید $z = x + iy$. آنگاه:

$$z \cdot 0 = (x + iy)(0 + i0) = x \cdot 0 + x \cdot i0 + iy \cdot 0 + iy \cdot i0 = 0$$

۳. معکوس ضرب $3 + 4i$ را بیابید. پاسخ: با استفاده از فرمول:

$$z^{-1} = \frac{3}{3^2 + 4^2} - i \frac{4}{9 + 16} = \frac{3}{25} - i \frac{4}{25}$$

۳.۱ ویژگی‌های جبری پیشرفته

۴. ویژگی توزیع پذیری را برای $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 - i$, $z_3 = -1 + 2i$ تأیید کنید.
پاسخ: محاسبه $z_2 + z_3 = (2 - i) + (-1 + 2i) = 1 + i$ سمت چپ: $z_1(z_2 + z_3) = (1 + i)(1 + i) = 2i$
سمت راست: $z_1z_2 = (1 + i)(2 - i) = 3 + i$, $z_1z_3 = (1 + i)(-1 + 2i) = -3 + i$
بنابراین، $z_1z_2 + z_1z_3 = (3 + i) + (-3 + i) = 2i$ که ویژگی را تأیید می‌کند.

۱۴.۲.۱ تمرین‌های دشوارتر

برای به چالش کشیدن یادگیرندگان پیشرفته:

۱. اثبات کنید که $\mathbb{C}$ یک میدان تحت جمع و ضرب است.
۲. نشان دهید که تنها اعداد مختلطی که $z = z^{-1}$ را برآورده می‌کنند، ۱ و -۱ هستند.
۳. اثبات کنید که برای $z, w \neq 0$, $(zw)^{-1} = z^{-1}w^{-1}$.

۳.۱ ویژگی‌های جبری پیشرفته

اعداد مختلط، که با $\mathbb{C}$ نشان داده می‌شوند، یک ساختار جبری قوی را تشکیل می‌دهند که اعداد حقیقی را گسترش می‌دهد. پس از عملیات‌های پایه و ویژگی‌های جبری، این بخش به بررسی ویژگی‌های اضافی حیاتی برای دستکاری اعداد مختلط می‌پردازد، با تمرکز بر برابری، بخش‌های حقیقی و موهومی، انواع خاص و معرفی ویژگی‌های مزدوج.

۳.۱ ویژگی‌های جبری پیشرفته

۱.۳.۱ تعریف اعداد مختلط

عدد مختلط به صورت $z = x + iy$ بیان می‌شود، که در آن $x, y \in \mathbb{R}$ به ترتیب بخش‌های حقیقی و موهومی هستند و i واحد موهومی است که $i^2 = -1$ را برآورده می‌کند. بخش حقیقی $\text{Re}(z) = x$ و بخش موهومی $\text{Im}(z) = y$ است. این اجزا زیربنای ویژگی‌هایی هستند که در اینجا بحث می‌شوند.

۲.۳.۱ برابری اعداد مختلط

دو عدد مختلط $z_1 = a + ib$ و $z_2 = c + id$ ، که در آن $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ، مساوی هستند اگر و تنها اگر بخش‌های حقیقی و موهومی آن‌ها مساوی باشند:

$$z_1 = z_2 \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad a = c \quad \text{و} \quad b = d.$$

استنتاج: اگر $z_1 = z_2$ ، آنگاه $a + ib = c + id$. با مساوی قرار دادن ضرایب حقیقی و موهومی، $a = c$ و $b = d$. برعکس، اگر $a = c$ و $b = d$ ، آنگاه $z_1 = z_2$. این ویژگی برای حل معادلات شامل اعداد مختلط اساسی است.

۳.۳.۱ ویژگی‌های بخش‌های حقیقی و موهومی

بخش‌های حقیقی و موهومی یک عدد مختلط تحت عملیات‌های جبری رفتارهای خاصی از خود نشان می‌دهند:

۳.۱ ویژگی‌های جبری پیشرفته

• جمع:

$$\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Re}(z_2), \quad \operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2).$$

• ضرب اسکالر (برای $k \in \mathbb{R}$):

$$\operatorname{Re}(kz) = k \operatorname{Re}(z), \quad \operatorname{Im}(kz) = k \operatorname{Im}(z).$$

• ضرب:

$$\operatorname{Re}(z_1 z_2) = \operatorname{Re}(z_1) \operatorname{Re}(z_2) - \operatorname{Im}(z_1) \operatorname{Im}(z_2),$$

$$\operatorname{Im}(z_1 z_2) = \operatorname{Re}(z_1) \operatorname{Im}(z_2) + \operatorname{Im}(z_1) \operatorname{Re}(z_2).$$

استنتاج برای ضرب: فرض کنید $z_1 = a + ib$ ، $z_2 = c + id$. آنگاه:

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

بنابراین، $\operatorname{Re}(z_1 z_2) = ac - bd$ و $\operatorname{Im}(z_1 z_2) = ad + bc$.

۴.۳.۱ شرایط برای انواع خاص

اعداد مختلط را می‌توان بر اساس اجزای آن‌ها طبقه‌بندی کرد:

• حقیقی: $z = x + iy$ حقیقی است اگر $\operatorname{Im}(z) = y = 0$ ، پس $z = x$.

• کاملاً موهومی: z کاملاً موهومی است اگر $\operatorname{Re}(z) = x = 0$ ، پس $z = iy$.

۳.۱ ویژگی‌های جبری پیشرفته

• صفر: $z = 0$ اگر $x = 0$ و $y = 0$.

این شرایط برای شناسایی ماهیت اعداد مختلط در معادلات و کاربردها ضروری هستند.

۵.۳.۱ معرفی مزدوج‌های مختلط

مزدوج مختلط $z = x + iy$ ، که با $\bar{z} = x - iy$ نشان داده می‌شود، در اینجا معرفی می‌شود زیرا اغلب در ویژگی‌های بعدی ظاهر می‌شود. هویت‌های کلیدی عبارتند از:

$$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z) = 2x, \quad z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z) = 2iy, \quad z\bar{z} = x^2 + y^2.$$

این ویژگی‌ها، در حالی که بعداً به طور کامل بررسی می‌شوند، بینشی در مورد ساختار جبری اعداد مختلط ارائه می‌دهند.

۶.۳.۱ مثال‌های گویا

۱. برابری: برای $z_1 = 2 + 3i$ ، $z_2 = 2 + 3i$ ، از آنجا که $\operatorname{Re}(z_1) = 2 = \operatorname{Re}(z_2)$ و $\operatorname{Im}(z_1) = 3 = \operatorname{Im}(z_2)$ داریم $z_1 = z_2$.

۲. بخش‌های حقیقی و موهومی: فرض کنید $z_1 = 1 + 2i$ ، $z_2 = 3 - i$. آنگاه $z_1 + z_2 = 4 + i$. بنابراین $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = 4 = 1 + 3$ ، $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = 1 = 2 - 1$.

۳. ضرب: برای $z_1 = 1 + i$ ، $z_2 = 2 - i$ ، $z_1 z_2 = 3 + i$. بنابراین، $\operatorname{Re}(z_1 z_2) = 3 = (1)(2) - (1)(-1)$ ، $\operatorname{Im}(z_1 z_2) = 1 = (1)(-1) + (1)(2)$.

۴. انواع خاص: $z = 5$ حقیقی است ($\operatorname{Im}(z) = 0$)؛ $w = 4i$ کاملاً موهومی است ($\operatorname{Re}(w) = 0$).

۷.۳.۱ کاربردها

این ویژگی‌ها در زمینه‌هایی مانند مهندسی برق، که در آن اعداد مختلط رفتار مدار را مدل می‌کنند، و در فیزیک، که در آن توابع موج را توصیف می‌کنند، حیاتی هستند. توانایی دستکاری بخش‌های حقیقی و موهومی، محاسبات دقیقی را در چنین کاربردهایی تضمین می‌کند.

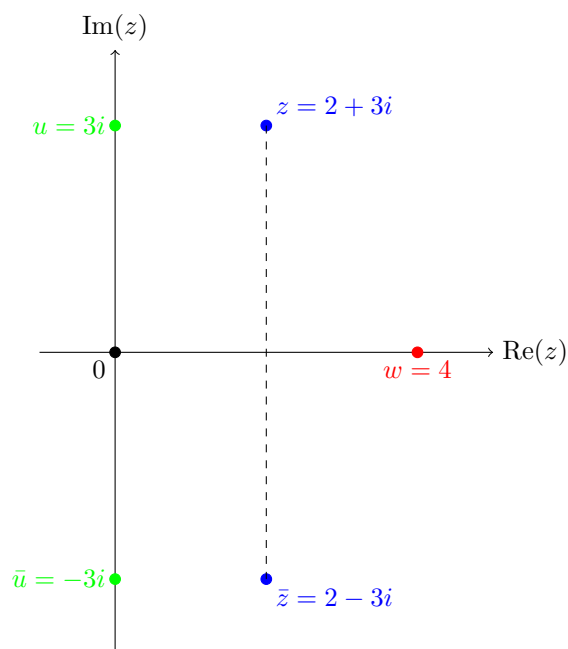
۸.۳.۱ زمینه تاریخی

اعداد مختلط در قرن شانزدهم با تردید مواجه شدند، و کاردانو و بومبلی نقش آن‌ها را در حل معادلات مکعبی بررسی کردند. تا قرن هجدهم، اویلر و گاوس ویژگی‌های آن‌ها، از جمله ویژگی‌های بحث‌شده در اینجا، را رسمی کردند و اعداد مختلط را به عنوان سنگ بنای ریاضیات تثبیت کردند. ویژگی‌های جبری در این بخش، کار بنیادی را منعکس می‌کنند که پذیرش گسترده آن‌ها را ممکن ساخت.

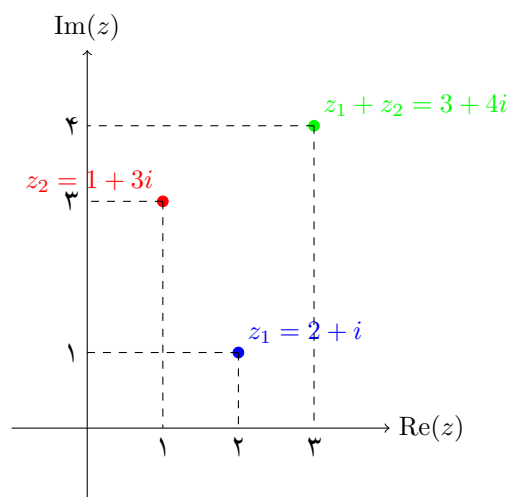
۹.۳.۱ شهود

صفحه مختلط را به عنوان یک سیستم مختصات تصور کنید، با محور افقی برای بخش‌های حقیقی و محور عمودی برای بخش‌های موهومی. عدد مختلط $z = x + iy$ نقطه‌ای در (x, y) است. جمع اعداد مختلط مشابه جمع بردارها است، در حالی که بخش‌های حقیقی و موهومی مختصات را تعریف می‌کنند. مزدوج $\bar{z} = x - iy$ تصویر z را در سراسر محور حقیقی منعکس می‌کند، که ویژگی‌هایی مانند $z + \bar{z}$ که حقیقی است (روی محور حقیقی قرار دارد) را نشان می‌دهد.

۳.۱ ویژگی‌های جبری پیشرفته

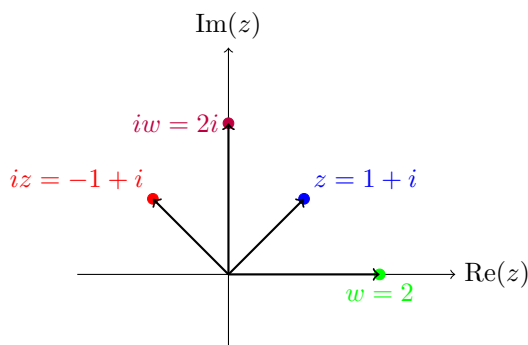


شکل ۱۱.۱: اعداد مختلط و مزدوج آن‌ها در صفحه مختلط. عدد مختلط عمومی $z = 2 + 3i$ و مزدوج آن $\bar{z} = 2 - 3i$ نسبت به محور حقیقی متقارن هستند. عدد حقیقی $w = 4$ مزدوج خودش است و روی محور حقیقی قرار دارد، در حالی که عدد کاملاً موهومی $u = 3i$ مزدوج $\bar{u} = -3i$ را روی محور موهومی دارد. مبدا نشان‌دهنده صفر است. دو عدد مختلط تنها در صورتی برابرند که اجزای حقیقی و موهومی آن‌ها برابر باشند و به عنوان نقاط منطبق شوند.



شکل ۱۲.۱: جمع اعداد مختلط و اجزای حقیقی و موهومی آن‌ها. برای $z_1 = 2 + i$ و $z_2 = 1 + 3i$ ، جمع برابر است با $z_1 + z_2 = 3 + 4i$. اجزای حقیقی جمع می‌شوند: $\text{Re}(z_1) + \text{Re}(z_2) = 2 + 1 = 3 = \text{Re}(z_1 + z_2)$ ، و اجزای موهومی جمع می‌شوند: $\text{Im}(z_1) + \text{Im}(z_2) = 1 + 3 = 4 = \text{Im}(z_1 + z_2)$. خطوط خط‌چین تصویرها را روی محورها نشان می‌دهند.

۳.۱ ویژگی‌های جبری پیشرفته



شکل ۱۳.۱: ضرب در i در صفحه مختلط. ضرب یک عدد مختلط در i منجر به چرخش 90° در جهت خلاف عقربه‌های ساعت می‌شود. به عنوان مثال، $i(1+i) = -1+i$ و $i \cdot 2 = 2i$. بردارها موقعیت‌ها را قبل و بعد از ضرب نشان می‌دهند.

۱۰.۳.۱ تمرین‌ها

تمرین‌های زیر ویژگی‌های بحث‌شده را تقویت می‌کنند:

۱. تعیین کنید که آیا $z_1 = 3 + 2i$ و $z_2 = 3 - 2i$ مساوی هستند. پاسخ: از آنجا که $z_1 \neq z_2$, $\text{Im}(z_1) = 2 \neq -2 = \text{Im}(z_2)$.

۲. بخش‌های حقیقی و موهومی $z = (2+i)(1-i)$ را محاسبه کنید. پاسخ: $z = 2 - 2i + i - i^2 = 3 - i$. بنابراین، $\text{Re}(z) = 3$, $\text{Im}(z) = -1$.

۳. نشان دهید که برای هر عدد مختلط z حقیقی است. پاسخ: فرض کنید $z = x + iy$. آنگاه $z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x$ ، که حقیقی است.

۴. تعیین کنید که آیا $z = 2i$ حقیقی، کاملاً موهومی یا صفر است. پاسخ: از آنجا که $\text{Re}(z) = 0$ ، z کاملاً موهومی است.

۴.۱ بردارها و قدر مطلقها

۱۱.۳.۱ تمرینهای دشوارتر

۱. اثبات کنید که $\operatorname{Re}(z_1 z_2) = \operatorname{Re}(z_1) \operatorname{Re}(z_2) - \operatorname{Im}(z_1) \operatorname{Im}(z_2)$.
۲. نشان دهید که اگر z^2 حقیقی باشد، آنگاه z حقیقی یا کاملاً موهومی است.
۳. تمام اعداد مختلط z را بیابید که $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$.

۴.۱ بردارها و قدر مطلقها

۱.۴.۱ تعریف صفحه مختلط

صفحه مختلط، یا صفحه آرگاند، یک سیستم مختصات دوبعدی است که در آن محور افقی بخش حقیقی و محور عمودی بخش موهومی یک عدد مختلط را نشان می‌دهد. یک عدد مختلط $z = x + iy$ ، که در آن $x, y \in \mathbb{R}$ و $i^2 = -1$ ، متناظر با نقطه (x, y) است. این نمایش هندسی، تجسم اعداد مختلط را به عنوان نقاط یا بردارها تسهیل می‌کند.

۲.۴.۱ بردارها در صفحه مختلط

هر عدد مختلط $z = x + iy$ می‌تواند با یک بردار از مبدأ $(0, 0)$ به نقطه (x, y) مرتبط شود. این بردار دارای اجزای (x, y) است و عملیاتی‌هایی مانند جمع، متناظر با جمع بردارها در صفحه است. به عنوان مثال، جمع $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ منجر به برداری به $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ می‌شود.

۴.۱ بردارها و قدر مطلق‌ها

۳.۴.۱ قدر مطلق یک عدد مختلط

قدر مطلق یک عدد مختلط $z = x + iy$ ، که با $|z|$ نشان داده می‌شود، فاصله اقلیدسی از مبدأ تا نقطه (x, y) است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

این عدد حقیقی غیرمنفی، اندازه یا قدر مطلق z را نشان می‌دهد، مشابه قدر مطلق اعداد حقیقی.

۴.۴.۱ ویژگی‌های اصلی قدر مطلق

قدر مطلق چندین ویژگی کلیدی را برآورده می‌کند که برای دستکاری‌های جبری و هندسی ضروری هستند:

۱. غیرمنفی بودن: $|z| \geq 0$ ، و $|z| = 0$ اگر و تنها اگر $z = 0$.

۲. ویژگی ضرب: برای هر اعداد مختلط z_1, z_2 ،

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|.$$

۳. ویژگی تقسیم: برای $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ، $z_2 \neq 0$ ،

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

۴.۱ بردارها و قدر مطلقها

۴. نامساوی مثلث: برای هر $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

۵. نامساوی مثلث معکوس: برای هر $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$$

۵.۴.۱ استنتاج ویژگی‌های اصلی

ویژگی ضرب: فرض کنید $z_1 = x_1 + iy_1$ ، $z_2 = x_2 + iy_2$. آنگاه:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

قدر مطلق به صورت:

$$|z_1 z_2| = \sqrt{(x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + y_1 x_2)^2}.$$

با بسط:

$$(x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + y_1 x_2)^2 = x_1^2 x_2^2 - 2x_1 x_2 y_1 y_2 + y_1^2 y_2^2 + x_1^2 y_2^2 + 2x_1 y_2 y_1 x_2 + y_1^2 x_2^2.$$

این به صورت زیر ساده می‌شود:

$$(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2).$$

۴.۱ بردارها و قدر مطلقها

بنابراین:

$$|z_1 z_2| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = |z_1| |z_2|.$$

نامساوی مثلث: از نظر هندسی، نامساوی مثلث منعکس کننده این است که طول یک ضلع مثلث حداکثر برابر با مجموع دو ضلع دیگر است. از نظر جبری، برای $z_1 = x_1 + iy_1$ ، $z_2 = x_2 + iy_2$:

$$|z_1 + z_2|^2 = (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + y_1^2 + y_2^2 + 2y_1y_2.$$

در مقایسه با:

$$(|z_1| + |z_2|)^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + 2\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)}.$$

از آنجا که $2x_1x_2 + 2y_1y_2 \leq 2\sqrt{x_1^2x_2^2} + 2\sqrt{y_1^2y_2^2} \leq 2\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)}$ نتیجه می شود که:

$$|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2,$$

بنابراین $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

۶.۴.۱ مثالهای گویا

۱. مقدار قدر مطلق: برای $z = 3 + 4i$,

$$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

۴.۱ بردارها و قدر مطلقها

۲. ویژگی ضرب: فرض کنید $z_1 = 1 + i$ ، $z_2 = 2 - i$. محاسبه:

$$z_1 z_2 = (1 + i)(2 - i) = 2 - i + 2i - i^2 = 3 + i.$$

سپس، $|z_1 z_2| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$. به طور جداگانه، $|z_1| = \sqrt{2}$ ، $|z_2| = \sqrt{5}$ ، بنابراین $|z_1||z_2| = \sqrt{10}$ که ویژگی را تأیید می‌کند.

۳. نامساوی مثلث: برای $z_1 = 1 + i$ ، $z_2 = -1 + i$

$$|z_1 + z_2| = |0 + 2i| = 2, \quad |z_1| + |z_2| = \sqrt{2} + \sqrt{2} \approx 2.828.$$

از آنجا که $2 < 2.828$ ، نامساوی برقرار است.

۷.۴.۱ نتایج و کاربردها

نامساوی مثلث به چندین عدد مختلط گسترش می‌یابد: $|z_1 + \dots + z_n| \leq |z_1| + \dots + |z_n|$. قدر مطلق در فیزیک برای نمایش دامنه امواج، در پردازش سیگنال برای تحلیل بزرگی سیگنال‌ها، و در ریاضیات برای تعریف همگرایی در دنباله‌ها و سری‌های مختلط استفاده می‌شود.

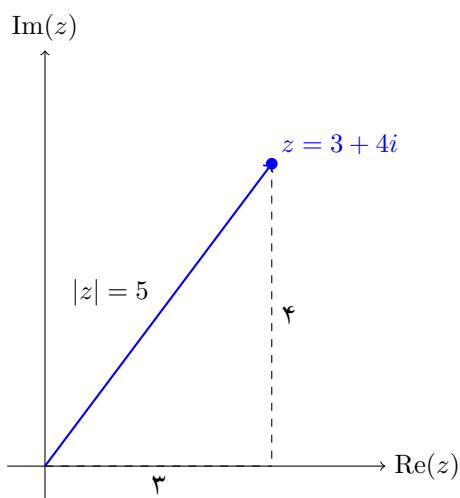
۸.۴.۱ زمینه تاریخی

تفسیر هندسی اعداد مختلط به عنوان بردارها توسط کاسپار ووسل (۱۷۹۹)، ژان-روبر آرگاند (۱۸۰۶) و کارل فریدریش گاوس در اوایل قرن نوزدهم توسعه یافت. کار آن‌ها صفحه مختلط را تثبیت کرد، با قدر مطلق به عنوان معیار فاصله، که کاربردهای اعداد مختلط را متحول کرد.

۴.۱ بردارها و قدر مطلق‌ها

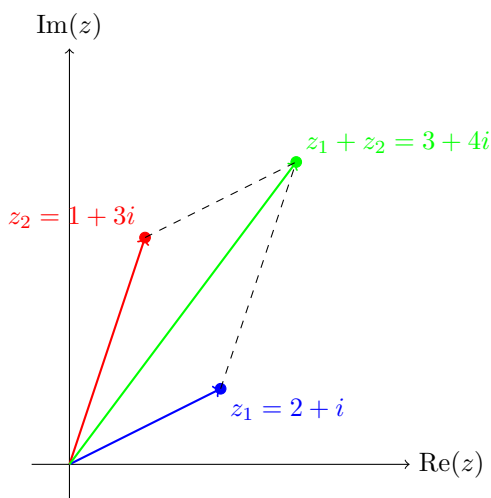
۹.۴.۱ شهود

صفحه مختلط را به عنوان شبکه کارتزین تصور کنید، با محور افقی برای بخش‌های حقیقی و محور عمودی برای بخش‌های موهومی. یک عدد مختلط $z = x + iy$ برداری از مبدأ به (x, y) است. قدر مطلق $|z|$ طول این بردار است، که با قضیه فیثاغورث محاسبه می‌شود. برای $z = 3 + 4i$ ، بردار به $(3, 4)$ می‌رسد، با طول ۵. جمع بردارها متناظر با جمع موازی الاضلاع است، و نامساوی مثلث تضمین می‌کند که طول مسیر مستقیم حداکثر برابر با مجموع طول‌های مسیرهای منفرد است.

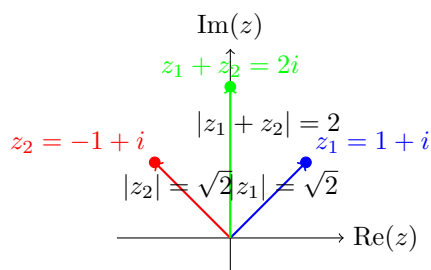


شکل ۱۴.۱: نمایش عدد مختلط $z = 3 + 4i$ به صورت بردار در صفحه مختلط. مقدار مطلق $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ طول بردار است، که با مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع ۳ و ۴ نشان داده شده است.

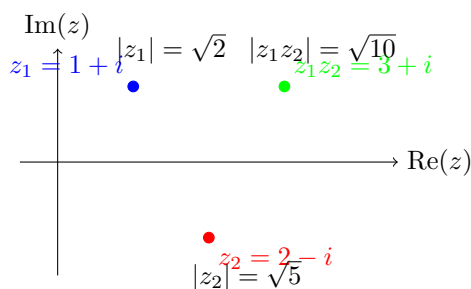
۴.۱ بردارها و قدر مطلقها



شکل ۱۵.۱: جمع برداری اعداد مختلط $z_1 = 2 + i$ و $z_2 = 1 + 3i$ ، منجر به $z_1 + z_2 = 3 + 4i$ می‌شود. خطوط خط‌چین متوازی‌الاضلاع تشکیل شده توسط بردارهای z_1 و z_2 را کامل می‌کنند.



شکل ۱۶.۱: نمایش نابرابری مثلثی: برای $z_1 = 1 + i$ و $z_2 = -1 + i$ داریم $|z_1 + z_2| = 2 < |z_1| + |z_2| = 2\sqrt{2} \approx 2.828$. مقادیر مطلق نزدیک بردارهای مربوطه برچسب‌گذاری شده‌اند.



شکل ۱۷.۱: نمایش خاصیت ضرب در مقدار مطلق: برای $z_1 = 1 + i$ و $z_2 = 2 - i$ داریم $|z_1 z_2| = \sqrt{10} = |z_1| |z_2| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{10}$

۵.۱ مزدوج‌های مختلط

۱۰.۴.۱ تمرین‌ها

۱. قدر مطلق $z = -2 + 5i$ را محاسبه کنید. پاسخ: $|z| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$.

۲. نامساوی مثلث را برای $z_1 = 2i$ ، $z_2 = 3$ تأیید کنید. پاسخ: $z_1 + z_2 = 3 + 2i$ پس $|z_1 + z_2| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} \approx 3.606$ از آنجا که $|z_1| = 2$ ، $|z_2| = 3$ و $2 + 3 = 5 > 3.606$ نامساوی برقرار است.

۳. نشان دهید که $|z|^2 = z\bar{z}$. پاسخ: برای $z = x + iy$ ، $\bar{z} = x - iy$. بنابراین، $z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$.

۱۱.۴.۱ تمرین‌های دشوارتر

۱. اثبات کنید $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$.
۲. نشان دهید که $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ یک دیسک بسته تشکیل می‌دهد.
۳. تمام z را بیابید که $|z - 1| = |z + 1|$.

۵.۱ مزدوج‌های مختلط

مزدوج‌های مختلط یک مفهوم بنیادی در جبر اعداد مختلط هستند که عملیات‌های کلیدی مانند محاسبه قدر مطلق و تقسیم را ممکن می‌سازند. این بخش به تفصیل تعریف، ویژگی‌ها، مثال‌های گویا و کاربردهای آن‌ها را، ارائه می‌دهد.

۵.۱ مزدوج‌های مختلط

۱.۵.۱ تعریف

مزدوج مختلط یک عدد مختلط $z = x + iy$ که در آن $x, y \in \mathbb{R}$ و $i^2 = -1$ ، با $\bar{z}$ نشان داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{z} = x - iy.$$

از نظر هندسی، $\bar{z}$ انعکاس z در سراسر محور حقیقی در صفحه مختلط است.

۲.۵.۱ ویژگی‌های اصلی

ویژگی‌های زیر رفتار مزدوج‌های مختلط را، که در آن $z = x + iy$ ، $w = a + ib \in \mathbb{C}$ ، کنترل می‌کنند:

۱. مزدوج مضاعف: $\bar{\bar{z}} = z$.

۲. جمع با مزدوج: $z + \bar{z} = 2x = 2 \operatorname{Re}(z)$.

۳. تفاضل با مزدوج: $z - \bar{z} = 2iy = 2i \operatorname{Im}(z)$.

۴. ضرب با مزدوج: $z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$.

۵. جمع اعداد مختلط: $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$.

۶. ضرب اعداد مختلط: $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$.

۷. تقسیم: برای $w \neq 0$ ، $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$.

۸. برابری قدر مطلق: $|z| = |\bar{z}|$.

۵.۱ مزدوج‌های مختلط

استنتاج‌ها:

• ویژگی ۱: $\bar{\bar{z}} = \overline{x - iy} = x - (-y)i = x + iy = z$

• ویژگی ۴: $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - ixy + ixy - i^2y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$

• ویژگی ۵: $\overline{z + w} = \overline{(x + a) + i(y + b)} = (x + a) - i(y + b) = (x - iy) + (a - ib) = \bar{z} + \bar{w}$

• ویژگی ۶: $\overline{zw} = \overline{(x + iy)(a + ib)} = \overline{(xa - yb) + i(xb + ya)} = (xa - yb) - i(xb + ya)$

$i(xb + ya)$ در مقایسه با $i(-xb - ya)$

• ویژگی ۷: برای $\frac{z}{w} = zw^{-1}$ ، $\frac{\bar{z}}{\bar{w}} = \overline{zw^{-1}} = \bar{z}\bar{w}^{-1}$ ، از آنجا که $w^{-1} = \frac{\bar{w}}{|w|^2}$

پس $\frac{\bar{z}}{\bar{w}} = \frac{\bar{z}w\bar{w}}{|w|^2} = \frac{\bar{z}w}{|w|^2}$ ، به طور جایگزین،

• ویژگی ۸: $|\bar{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$

۳.۵.۱ مثال‌های گویا

۱. برای $z = 3 + 4i$:

• $\bar{z} = 3 - 4i$

• $z + \bar{z} = 6 = 2 \cdot 3 = 2 \operatorname{Re}(z)$

• $z - \bar{z} = 8i = 2i \cdot 4 = 2i \operatorname{Im}(z)$

• $z\bar{z} = (3 + 4i)(3 - 4i) = 9 + 16 = 25 = |z|^2$

۲. برای $z = 1 + i$ ، $w = 2 - i$:

۵.۱ مزدوج‌های مختلط

$$zw = (1+i)(2-i) = 2 - i + 2i - i^2 = 3 + i \bullet$$

$$\overline{zw} = 3 - i \bullet$$

$$\bar{z}\bar{w} = (1-i)(2+i) = 2 + i - 2i - i^2 = 3 - i \text{ پس } \bar{w} = 2 + i, \bar{z} = 1 - i \bullet$$

۳. تقسیم: محاسبه $\frac{1+i}{2-i}$:

$$\frac{1+i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{(1+i)(2+i)}{4+1} = \frac{2+i+2i+i^2}{5} = \frac{1+3i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i.$$

$$\frac{\bar{z}}{\bar{w}} = \frac{1-i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{(1-i)(2-i)}{4+1} = \frac{2-i-2i-i^2}{5} = \frac{1-3i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i \text{ و } \overline{\left(\frac{1+i}{2-i}\right)} = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i \text{ تأیید:}$$

۴.۵.۱ نتایج و کاربردها

مزدوج‌های مختلط چندین عملیات کلیدی را تسهیل می‌کنند:

- محاسبه قدر مطلق: قدر مطلق به صورت $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ محاسبه می‌شود.

- تقسیم: ضرب صورت و مخرج در مزدوج مخرج برای ساده‌سازی.

- عبارات با مقدار حقیقی: در فیزیک و مهندسی برای تضمین نتایج حقیقی.

- ریشه‌های چندجمله‌ای: برای چندجمله‌ای‌ها با ضرایب حقیقی، ریشه‌ها به صورت جفت‌های مزدوج می‌آیند.

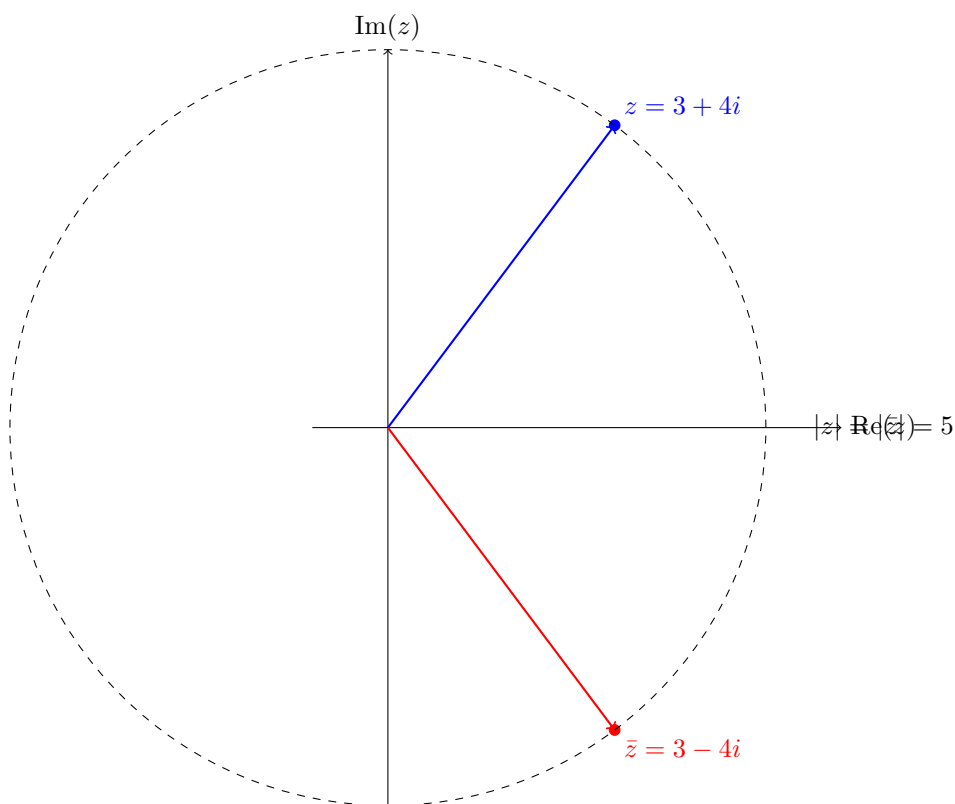
۵.۱ مزدوج‌های مختلط

۵.۵.۱ زمینه تاریخی

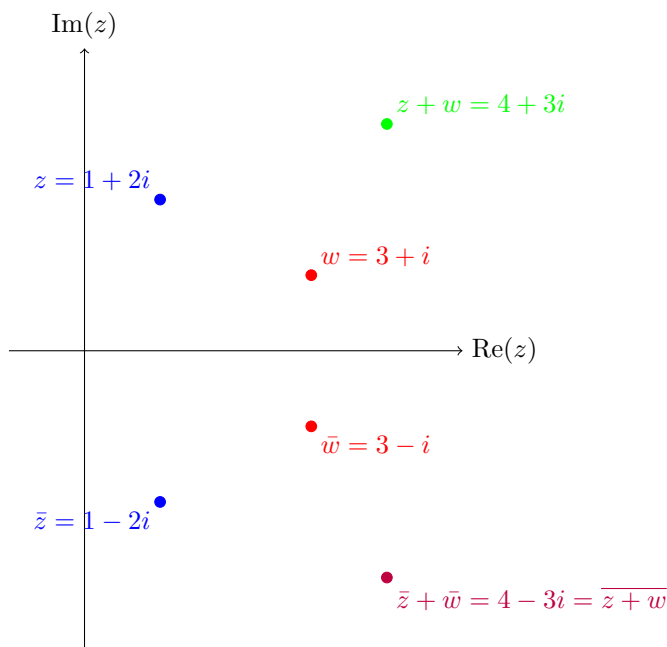
مفهوم مزدوج‌های مختلط همراه با اعداد مختلط در قرن شانزدهم پدید آمد و توسط اویلر و گاوس در قرن‌های هجدهم و نوزدهم رسمی شد. کار آن‌ها بر ویژگی‌های جبری و هندسی اعداد مختلط، سودمندی آن‌ها را در حل معادلات و مدل‌سازی سیستم‌های فیزیکی تثبیت کرد.

۶.۵.۱ شهود

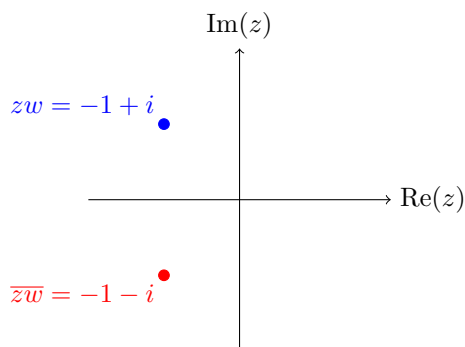
صفحه مختلط را به عنوان بوم دوبعدی تصور کنید، با محور حقیقی افقی و محور موهومی عمودی. برای $z = x + iy$ در (x, y) ، مزدوج $\bar{z} = x - iy$ در $(x, -y)$ قرار دارد. این انعکاس نشان می‌دهد که z و $\bar{z}$ قدر مطلق یکسانی دارند. جمع $z + \bar{z} = 2x$ روی محور حقیقی است، و $z\bar{z} = x^2 + y^2$ یک مقدار حقیقی است.



شکل ۱۸.۱: عدد مختلط $z = 3 + 4i$ و مزدوج آن $\bar{z} = 3 - 4i$ نسبت به محور حقیقی بازتاب یکدیگر هستند. هر دو روی دایره‌ای با شعاع ۵ و مرکز مبدا قرار دارند، که نشان می‌دهد $|z| = |\bar{z}| = 5$. علاوه بر این، مزدوج دوگانه $\bar{\bar{z}} = z$ ، و حاصل ضرب $z\bar{z} = 25$ ، که یک عدد حقیقی برابر با $|z|^2$ است.



شکل ۱۹.۱: برای اعداد مختلط $z = 1 + 2i$ و $w = 3 + i$ ، جمع آن‌ها $z + w = 4 + 3i$ و مزدوج آن $\overline{z + w} = 4 - 3i$ است. به طور مشابه، جمع مزدوج‌ها $\bar{z} + \bar{w} = (1 - 2i) + (3 - i) = 4 - 3i$ را نشان می‌دهد. که خاصیت $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ را نشان می‌دهد.



شکل ۲۰.۱: برای $z = 1 + i$ و $w = i$ ، حاصل ضرب $zw = (1 + i)(i) = -1 + i$ و مزدوج آن $\overline{zw} = -1 - i$ است. حاصل ضرب مزدوج‌ها $\bar{z}\bar{w} = (1 - i)(-i) = -1 - i$ را نشان می‌دهد که $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ به طور مشابه، برای تقسیم، وقتی $w \neq 0$ ، $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$.

۶.۱ شکل نمایی

۷.۵.۱ تمرین‌ها

۱. مزدوج $z = 5 - 2i$ را بیابید. پاسخ: $\bar{z} = 5 + 2i$.
۲. $z\bar{z}$ را برای $z = 3 + i$ محاسبه کنید. پاسخ: $z\bar{z} = (3+i)(3-i) = 9 - i^2 = 9 + 1 = 10$.
۳. نشان دهید که z کاملاً موهومی است اگر و تنها اگر $z = -\bar{z}$. پاسخ: اگر $z = iy$ ، آنگاه $\bar{z} = -iy = -z$. برعکس، اگر $z = -\bar{z}$ ، آنگاه $z + \bar{z} = 0$ ، پس $2\operatorname{Re}(z) = 0$ ، که دلالت دارد $z = iy$.
۴. $\frac{1}{z}$ را برای $z = 2 + 3i$ محاسبه کنید. پاسخ: $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{2-3i}{4+9} = \frac{2-3i}{13} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$.
۵. تأیید کنید $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ برای $z = 1 + i$ ، $w = 2 - i$. پاسخ: $z + w = 3$ ، پس $\overline{z+w} = 3$. همچنین، $\bar{z} = 1 - i$ ، $\bar{w} = 2 + i$ ، پس $\bar{z} + \bar{w} = 3$.

۸.۵.۱ تمرین‌های دشوارتر

۱. اثبات کنید که $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ برای هر عدد صحیح n .
۲. نشان دهید که اگر $f(z)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی باشد، آنگاه $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$.
۳. تمام اعداد مختلط z را بیابید که $z^2 = \bar{z}$.
۴. اثبات کنید که $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$.

۶.۱ شکل نمایی

۶.۱ شکل نمایی

۱.۶.۱ تعریف

یک عدد مختلط غیرصفر $z = x + iy$ ، که در آن $x, y \in \mathbb{R}$ و $i^2 = -1$ ، به شکل نمایی به صورت $z = re^{i\theta}$ بیان می‌شود، که در آن:

• $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ قدر مطلق (فاصله از مبدأ در صفحه مختلط) است.

• $\theta = \arg z$ آرگومان (زاویه از محور حقیقی مثبت) است، که با فرمول اوایلر مرتبط است:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

۲.۶.۱ یافتن آرگومان

برای تبدیل یک عدد مختلط به شکل نمایی، باید قدر مطلق و آرگومان را محاسبه کرد:

• قدر مطلق: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

• آرگومان: آرگومان θ با استفاده از تابع آرکتانژانت تعیین می‌شود، تنظیم‌شده بر اساس ربع z :

– اگر $x > 0$ ، $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

– اگر $x < 0$ و $y \geq 0$ ، $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$

– اگر $x < 0$ و $y < 0$ ، $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \pi$

– اگر $x = 0$ و $y > 0$ ، $\theta = \frac{\pi}{2}$

– اگر $x = 0$ و $y < 0$ ، $\theta = -\frac{\pi}{2}$

آرگومان اصلی طوری انتخاب می‌شود که $-\pi < \theta \leq \pi$.

۶.۱ شکل نمایی

۳.۶.۱ ویژگی‌های اصلی

شکل نمایی ویژگی‌های کلیدی زیر را نشان می‌دهد:

۱. قدر مطلق ترم نمایی: قدر مطلق $e^{i\theta}$ برابر است با:

$$|e^{i\theta}| = |\cos \theta + i \sin \theta| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1.$$

بنابراین، $|z| = r \cdot 1 = r$.

۲. دوره‌ای بودن: تابع نمایی با دوره 2π دوره‌ای است:

$$e^{i(\theta+2\pi k)} = \cos(\theta + 2\pi k) + i \sin(\theta + 2\pi k) = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta},$$

برای هر عدد صحیح k .

۴.۶.۱ مثال‌های گویا

مثال‌های زیر تبدیل اعداد مختلط به شکل نمایی را نشان می‌دهند:

۱. برای $z = 1 + i$:

• قدر مطلق: $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

• آرگومان: $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$.

• بنابراین، $z = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

۲. برای $z = -1 - i$:

۶.۱ شکل نمایی

- قدر مطلق: $r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.
 - آرگومان: $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{-1}\right) - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$.
 - بنابراین، $z = \sqrt{2}e^{-i3\pi/4}$.
۳. برای $z = -2$:

- قدر مطلق: $r = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$.
 - آرگومان: $\theta = \pi$.
 - بنابراین، $z = 2e^{i\pi}$.
۴. برای $z = i$:

- قدر مطلق: $r = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$.
- آرگومان: $\theta = \frac{\pi}{2}$.
- بنابراین، $z = e^{i\pi/2}$.

۵.۶.۱ کاربردها

شکل نمایی عملیات‌هایی مانند ضرب، تقسیم و توان را ساده می‌کند، به عنوان مثال، ضرب دو عدد مختلط $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ و $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$ به صورت:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$

۶.۱ شکل نمایی

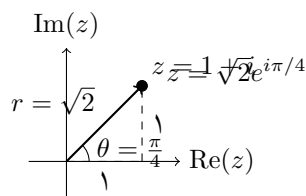
این شکل در مهندسی برق برای تحلیل مدارهای جریان متناوب و در فیزیک برای مدل‌سازی پدیده‌های موجی، که فاز و دامنه را نمایش می‌دهند، کاربرد دارد.

۶.۶.۱ زمینه تاریخی

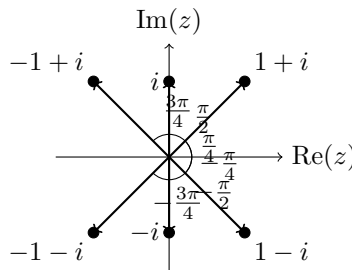
شکل نمایی ریشه در فرمول اویلر دارد که توسط لئونارد اویلر در قرن هجدهم کشف شد. فرمول اویلر، $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ، توابع نمایی و مثلثاتی را به هم متصل می‌کند و تحلیل مختلط را متحول کرد. مشارکت ریاضیدانانی مانند دموور این توسعه را تقویت کرد.

۷.۶.۱ شهود

صفحه مختلط را به عنوان یک بوم دوبعدی تصور کنید، با محور حقیقی افقی و محور موهومی عمودی. عدد مختلط $z = re^{i\theta}$ نقطه‌ای در فاصله r از مبدأ و زاویه θ از محور حقیقی است. ترم $e^{i\theta}$ نقطه‌ای روی دایره واحد را دنبال می‌کند، و ضرب در r آن را مقیاس می‌دهد. این نمایش دوره‌ای بودن تابع نمایی را نشان می‌دهد.



شکل ۲۱.۱: عدد مختلط $z = 1 + i$ در صفحه مختلط، با مقدار مطلق $r = \sqrt{2}$ و آرگومان $\theta = \frac{\pi}{4}$ ، که شکل نمایی $z = re^{i\theta}$ را نشان می‌دهد.



شکل ۲۲.۱: اعداد مختلط در ربع‌های مختلف و روی محورها، با آرگومان‌های θ آن‌ها. آرگومان بر اساس موقعیت نقطه در صفحه مختلط تعیین می‌شود. به عنوان مثال، برای $z = 1 + i$ ، $\theta = \pi/4$ ؛ برای $z = -1 + i$ ، $\theta = 3\pi/4$ ؛ برای $z = i$ ، $\theta = \pi/2$ ، و غیره.

۸.۶.۱ تمرین‌ها

۱. $z = 3 - 4i$ را به شکل نمایی بیان کنید. پاسخ:

• قدر مطلق: $r = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

• آرگومان: $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-4}{3}\right) \approx -0.927$ رادیان.

• بنابراین، $z = 5e^{i \tan^{-1}(-4/3)}$

۲. شکل نمایی $z = 2i$ را بیابید. پاسخ:

• قدر مطلق: $r = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$

• آرگومان: $\theta = \frac{\pi}{2}$

• بنابراین، $z = 2e^{i\pi/2}$

۳. بخش‌های حقیقی و موهومی $z = 3e^{i\pi/6}$ را بیابید. پاسخ:

• $z = 3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}$

• بخش حقیقی: $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ، بخش موهومی: $\frac{3}{2}$

۷.۱ ضرب و توان در شکل نمایی

۴. تأیید کنید که $|e^{i\pi/3}| = 1$. پاسخ:

$$e^{i\pi/3} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \bullet$$

$$\bullet \text{ قدر مطلق: } \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

۹.۶.۱ تمرین‌های دشوارتر

۱. نشان دهید که $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ برای هر عدد صحیح n .
۲. اثبات کنید که مجموعه $\{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ تحت ضرب یک گروه تشکیل می‌دهد.
۳. تمام اعداد مختلط z را بیابید که $z^4 = e^{i\pi}$.

۷.۱ ضرب و توان در شکل نمایی

۱.۷.۱ تعریف و نمادگذاری

یک عدد مختلط $z = x + iy$ ، که در آن $x, y \in \mathbb{R}$ و $i^2 = -1$ ، می‌تواند به شکل نمایی به صورت:

$$z = re^{i\theta}$$

بیان شود، که در آن $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ قدر مطلق و $\theta = \arg z$ آرگومان است، که با فرمول اوایلر مرتبط است:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

۷.۱ ضرب و توان در شکل نمایی

۲.۷.۱ ضرب در شکل نمایی

قضیه ۱.۷.۱ (ضرب): برای اعداد مختلط $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ و $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ ، ضرب آنها به صورت:

$$z_1 z_2 = (r_1 r_2) e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

است. استنتاج: با استفاده از شکل قطبی، $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ ، $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ ضرب به صورت:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)]$$

است. با استفاده از هویت‌های مثلثاتی:

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2,$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2,$$

دریافت می‌کنیم:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$

۷.۱ ضرب و توان در شکل نمایی

۳.۷.۱ خارج قسمت در شکل نمایی

قضیه ۱.۷.۱ (خارج قسمت): برای اعداد مختلط $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ ، $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ ، با $z_2 \neq 0$ ، خارج قسمت به صورت:

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r_1}{r_2} \right) e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

است. استنتاج: خارج قسمت $z_1 z_2^{-1}$ است. معکوس z_2 به صورت:

$$z_2^{-1} = \frac{1}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{1}{r_2} e^{-i\theta_2}$$

است، زیرا $e^{i\theta_2} e^{-i\theta_2} = e^{i0} = 1$ بنابراین:

$$\frac{z_1}{z_2} = r_1 e^{i\theta_1} \cdot \frac{1}{r_2} e^{-i\theta_2} = \left(\frac{r_1}{r_2} \right) e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

۴.۷.۱ توان در شکل نمایی

نتیجه ۲.۷.۱: برای عدد مختلط $z = r e^{i\theta}$ و عدد صحیح n ، توان به صورت:

$$z^n = r^n e^{in\theta}$$

است. استنتاج: برای n مثبت، $z^n = z \cdot z \cdot \dots \cdot z$ (n بار). با استفاده از قانون ضرب:

$$z^n = (r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}.$$

برای $n = 0$ ، $z^0 = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0 \cdot \theta}$ (اگر $z \neq 0$). برای n منفی، $z^{-m} = (z^m)^{-1} = (r^m e^{im\theta})^{-1} = \frac{1}{r^m} e^{-im\theta} = r^{-m} e^{i(-m)\theta}$.

۷.۱ ضرب و توان در شکل نمایی

۵.۷.۱ قضیه دمواور

نتیجه ۳.۷.۱ (قضیه دمواور): برای هر عدد صحیح n ،

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

استنتاج: از آنجا که $\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$ ،

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

۶.۷.۱ مثال‌های گویا

۱. ضرب: محاسبه $(1+i)(\sqrt{3}-i)$.

• برای $z_1 = 1+i$ ، $r_1 = \sqrt{2}$ ، $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$.

• برای $z_2 = \sqrt{3}-i$ ، $r_2 = 2$ ، $\theta_2 = -\frac{\pi}{6}$.

• ضرب: $z_1 z_2 = (\sqrt{2} \cdot 2)e^{i(\pi/4 - \pi/6)} = 2\sqrt{2}e^{i\pi/12}$.

• شکل مستطیلی: $\cos(\pi/12) \approx 0.966$ ، $\sin(\pi/12) \approx 0.259$ ، پس $z_1 z_2 \approx 2.732 + i0.732$.

۲. توان: محاسبه $(1-i)^5$.

• برای $z = 1-i$ ، $r = \sqrt{2}$ ، $\theta = -\frac{\pi}{4}$.

• بنابراین، $z = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$.

• توان: $z^5 = (\sqrt{2})^5 e^{-i5\pi/4} = 4\sqrt{2}e^{-i5\pi/4}$.

۷.۱ ضرب و توان در شکل نمایی

• از آنجا که $e^{-i5\pi/4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ پس $z^5 = -4 - 4i$.

۳. قضیه دمواور: تأیید برای $n = 3$ ، $\theta = \pi/3$.

• چپ: $(\cos(\pi/3) + i \sin(\pi/3))^3 = (1/2 + i\sqrt{3}/2)^3$.

• محاسبه: $(1/2 + i\sqrt{3}/2)^2 = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ ، سپس ضرب در $1/2 + i\sqrt{3}/2$ برابر -1 .

• راست: $\cos(3 \cdot \pi/3) + i \sin(3 \cdot \pi/3) = \cos \pi + i \sin \pi = -1$.

۷.۷.۱ نتایج و کاربردها

• معکوس: برای $z = re^{i\theta}$ ، $z^{-1} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$.

• کاربردها: شکل نمایی در مهندسی برق (پردازش سیگنال) و فیزیک (مکانیک موجی) محاسبات را ساده می‌کند.

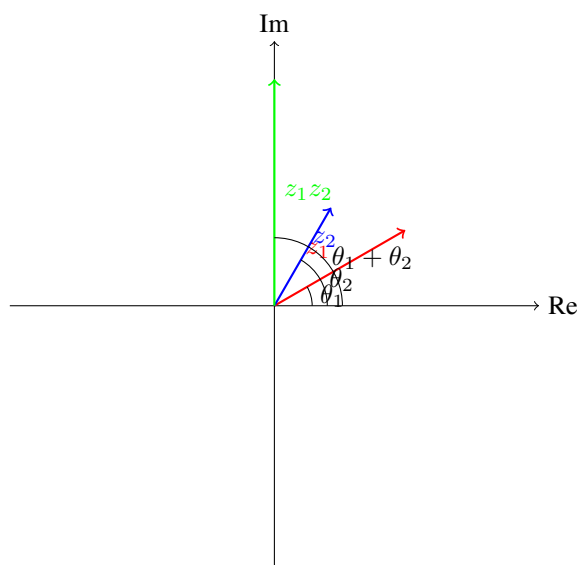
۸.۷.۱ زمینه تاریخی

شکل نمایی و عملیات آن از کارهای آبراهام دمواور (۱۶۶۷-۱۷۵۴) سرچشمه می‌گیرد، که قضیه دمواور را در سال ۱۷۲۲ منتشر کرد. اوایلر بعداً این را تعمیم داد و توابع نمایی و مثلثاتی را به هم متصل کرد، که دستکاری‌های اعداد مختلط را بهبود بخشید.

۷.۱ ضرب و توان در شکل نمایی

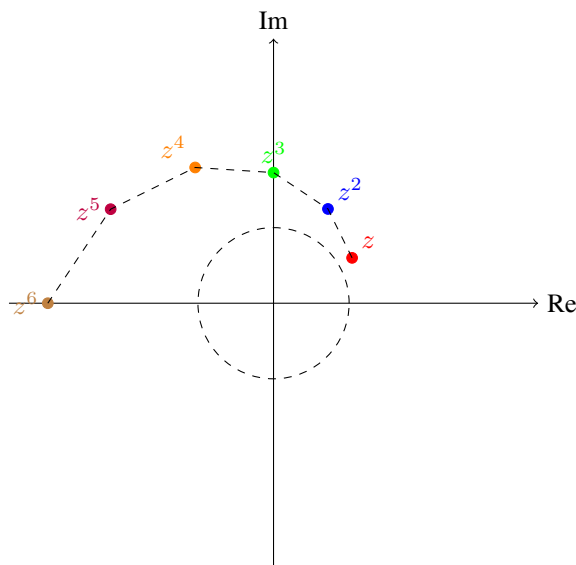
۹.۷.۱ شهود

صفحه مختلط را به عنوان یک عرصه دایره‌ای تصور کنید، که هر عدد مختلط $z = re^{i\theta}$ به صورت برداری با طول r و زاویه θ نمایش داده می‌شود. ضرب طول را مقیاس‌بندی می‌کند و زاویه‌ها را جمع می‌کند، در حالی که توان طول را به طور نمایی افزایش می‌دهد و زاویه را متناسب می‌چرخاند.



شکل ۲۳.۱: ضرب اعداد مختلط: $z_1 = 2e^{i\pi/6}$, $z_2 = 1.5e^{i\pi/3}$ و حاصل ضرب آن‌ها $z_1z_2 = 3e^{i\pi/2}$. زوایای $\theta_1 = \pi/6$, $\theta_2 = \pi/3$ و $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ نشان داده شده‌اند.

۷.۱ ضرب و توان در شکل نمایی



شکل ۲۴.۱: توان‌های عدد مختلط $z = 1.2e^{i\pi/6}$. نقاط نشان‌دهنده z^n برای $n = 1$ تا 6 هستند، با خط‌چین که مسیر را با افزایش n نشان می‌دهد، و رشد نمایی مقدار مطلق (r^n ، که $r = 1.2$) و افزایش متناسب آرگومان ($n\theta$ ، که $\theta = \pi/6$) را نشان می‌دهد. دایره واحد برای مرجع نمایش داده شده است.

۱۰.۷.۱ تمرین‌ها

۱. محاسبه $(2 + 2i)(1 - i)$ در شکل نمایی. پاسخ: $z_1 = 2\sqrt{2}e^{i\pi/4}$ ، $z_2 = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$. ضرب: $4e^{i0} = 4$

۲. یافتن $(-\sqrt{3} + i)^4$. پاسخ: $r = 2$ ، $\theta = \frac{5\pi}{6}$. سپس، $z^4 = 16e^{i4\pi/3} = -8 - 8i\sqrt{3}$

۳. تأیید قضیه دموآور برای $n = 2$ ، $\theta = \pi/4$. پاسخ: چپ: $(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))^2 = i$ ، راست: $\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) = i$

۱۱.۷.۱ تمرین‌های دشوارتر

۱. محاسبه $(1 + i)^{10}$ با استفاده از شکل نمایی.

۲. یافتن $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^8$

۸.۱ آرگومان‌های ضرب و خارج قسمت

۳. اثبات $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ با استفاده از شکل نمایی.

۴. نشان دهید که $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ تحت ضرب یک گروه تشکیل می‌دهد.

۸.۱ آرگومان‌های ضرب و خارج قسمت

آرگومان یک عدد مختلط ویژگی‌ای کلیدی در نمایش‌های قطبی و نمایی آن است که عملیات‌هایی مانند ضرب و تقسیم را تسهیل می‌کند. این بخش تعاریف، ویژگی‌ها، استنتاج‌ها، مثال‌های گویا و کاربردهای آرگومان‌ها را شرح می‌دهد.

۱.۸.۱ تعریف آرگومان

یک عدد مختلط $z = x + iy$ ، که در آن $x, y \in \mathbb{R}$ و $i^2 = -1$ ، می‌تواند به شکل قطبی به صورت:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

بیان شود، که در آن $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ قدر مطلق و $\theta = \arg z$ آرگومان است، که زاویه‌ای را از محور حقیقی مثبت در صفحه مختلط نشان می‌دهد. آرگومان اصلی، که با z نشان داده می‌شود، مقدار یکتایی در بازه $(-\pi, \pi]$ است. آرگومان با استفاده از تابع آرکتانژانت محاسبه می‌شود:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right),$$

با تنظیمات بر اساس ربع:

۸.۱ آرگومان‌های ضرب و خارج قسمت

• اگر $x > 0$ ، $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$.

• اگر $x < 0$ ، $y \geq 0$ ، $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) + \pi$.

• اگر $x < 0$ ، $y < 0$ ، $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) - \pi$.

• اگر $x = 0$ ، $y > 0$ ، $\theta = \frac{\pi}{2}$.

• اگر $x = 0$ ، $y < 0$ ، $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

آرگومان چندمقداری است، زیرا $\theta + 2\pi k$ (برای هر عدد صحیح k) همان عدد مختلط را نشان می‌دهد، اما آرگومان اصلی یک زاویه یکتا را تضمین می‌کند.

۲.۸.۱ ویژگی‌های اصلی

قضیه ۱: آرگومان ضرب برای اعداد مختلط $z_1, z_2 \neq 0$ ، آرگومان اصلی ضرب آن‌ها به صورت:

$$(z_1 z_2) = z_1 + z_2 - 2\pi k,$$

است، که در آن $k \in \mathbb{Z}$ طوری انتخاب می‌شود که $(z_1 z_2) \in (-\pi, \pi]$.

قضیه ۲: آرگومان خارج قسمت برای اعداد مختلط $z_1, z_2 \neq 0$ ، آرگومان اصلی خارج قسمت به صورت:

$$\left(\frac{z_1}{z_2} \right) = z_1 - z_2 + 2\pi m,$$

است، که در آن $m \in \mathbb{Z}$ طوری انتخاب می‌شود که $\left(\frac{z_1}{z_2} \right) \in (-\pi, \pi]$.

۸.۱ آرگومان‌های ضرب و خارج قسمت

۳.۸.۱ استنتاج ویژگی‌ها

این ویژگی‌ها با استفاده از شکل نمایی اعداد مختلط، با بهره‌گیری از فرمول اویلر: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ استنتاج می‌شوند.

ضرب: فرض کنید $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ ، $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ ، که در آن $\theta_1 = \arg z_1$ ، $\theta_2 = \arg z_2$. ضرب به صورت:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

است. آرگومان $z_1 z_2$ برابر است با $\theta_1 + \theta_2 + 2\pi k$ ، برای برخی عدد صحیح k . برای به دست آوردن آرگومان اصلی، k طوری انتخاب می‌شود که:

$$\theta_1 + \theta_2 + 2\pi k \in (-\pi, \pi].$$

به طور جایگزین، در شکل قطبی:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)],$$

با استفاده از هویت‌های مثلثاتی:

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2,$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2.$$

آرگومان اصلی برای قرار گرفتن در بازه استاندارد تنظیم می‌شود.

۸.۱ آرگومان‌های ضرب و خارج قسمت

خارج قسمت: برای $z_2 \neq 0$ ، خارج قسمت به صورت:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

آرگومان برابر است با $\theta_1 - \theta_2 + 2\pi m$ ، که در آن m طوری انتخاب می‌شود که:

$$\theta_1 - \theta_2 + 2\pi m \in (-\pi, \pi].$$

در شکل قطبی:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)],$$

با استفاده از:

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2,$$

$$\sin(\theta_1 - \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2.$$

۴.۸.۱ مثال‌های گویا

مثال‌های زیر کاربرد این ویژگی‌ها را نشان می‌دهند:

۱. ضرب: محاسبه $((1+i)(-1+i))$.

• برای $z_1 = 1+i$ ، $r_1 = \sqrt{2}$ ، $\theta_1 = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$.

• برای $z_2 = -1+i$ ، $r_2 = \sqrt{2}$ ، $\theta_2 = \pi - \tan^{-1}(1) = \frac{3\pi}{4}$.

• ضرب: $(1+i)(-1+i) = -1+i-i+i^2 = -2$ ، پس $\theta = \pi$.

۸.۱ آرگومان‌های ضرب و خارج قسمت

• مجموع آرگومان‌ها: $\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \pi$ ، که در $(-\pi, \pi]$ است، پس $k = 0$.

۲. ضرب با نیاز به تنظیم: محاسبه $((e^{i3\pi/4})(e^{i3\pi/4}))$.

• $z_1 = z_2 = e^{i3\pi/4}$ ، پس $z_1 = z_2 = \frac{3\pi}{4}$.

• ضرب: $z_1 z_2 = e^{i(3\pi/4+3\pi/4)} = e^{i3\pi/2}$.

• از آنجا که $\frac{3\pi}{2} > \pi$ ، تنظیم می‌کنیم: $\frac{3\pi}{2} - 2\pi = -\frac{\pi}{2}$ ، پس $(z_1 z_2) = -\frac{\pi}{2}$ ، با $k = 1$.

• تأیید: $e^{i3\pi/2} = -i$ و $(-i) = -\frac{\pi}{2}$.

۳. خارج قسمت: محاسبه $(\frac{1+i}{i})$.

• $z_1 = \frac{\pi}{4}$ ، $z_1 = 1 + i$.

• $z_2 = \frac{\pi}{2}$ ، $z_2 = i$.

• خارج قسمت: $(1 - i) = -\frac{\pi}{4}$ ، پس $\frac{1+i}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{-i-i^2}{1} = -i + 1 = 1 - i$.

• تفاضل: $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$ ، که در $(-\pi, \pi]$ است، پس $m = 0$.

۴. خارج قسمت با نیاز به تنظیم: محاسبه $(\frac{e^{i\pi/4}}{e^{i3\pi/2}})$.

• $z_2 = \frac{3\pi}{2}$ ، $z_1 = \frac{\pi}{4}$.

• خارج قسمت: $\frac{e^{i\pi/4}}{e^{i3\pi/2}} = e^{i(\pi/4-3\pi/2)} = e^{i(-5\pi/4)}$.

• از آنجا که $-\frac{5\pi}{4} < -\pi$ ، تنظیم می‌کنیم: $-\frac{5\pi}{4} + 2\pi = \frac{3\pi}{4}$ ، پس $(\frac{z_1}{z_2}) = \frac{3\pi}{4}$ ، با $m = 1$.

۵.۸.۱ نتایج و کاربردها

این ویژگی‌ها به اعداد مختلط متعدد گسترش می‌یابد:

۸.۱ آرگومان‌های ضرب و خارج قسمت

• برای ضرب: $(z_1 z_2 \cdots z_n) = z_1 + z_2 + \cdots + z_n - 2\pi k$.

• برای خارج قسمت: $\left(\frac{z_1 z_2 \cdots z_m}{w_1 w_2 \cdots w_n}\right) = (z_1 + \cdots + z_m) - (w_1 + \cdots + w_n) + 2\pi m$.

کاربردها شامل:

- مهندسی برق: آرگومان‌ها زوایای فاز را در مدارهای جریان متناوب نشان می‌دهند.
- فیزیک: آرگومان‌ها تغییرات فاز را در مکانیک موجی توصیف می‌کنند.
- تحلیل مختلط: این ویژگی‌ها محاسبه ریشه‌ها و لگاریتم‌های اعداد مختلط را پشتیبانی می‌کنند.

۶.۸.۱ زمینه تاریخی

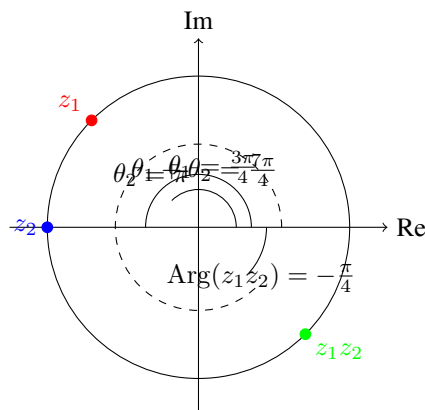
ویژگی‌های آرگومان‌های ضرب و خارج قسمت از کارهای لئونارد اویلر در قرن هجدهم سرچشمه می‌گیرد، که فرمول اویلر را توسعه داد و نمایش‌های قطبی و نمایی را به هم متصل کرد. مشارکت‌های آبراهام دمواور، به ویژه قضیه دمواور، دستکاری آرگومان‌ها را در ضرب و توان روشن کرد و کاربردهای اعداد مختلط را در ریاضیات و علم تقویت نمود.

۷.۸.۱ شهود

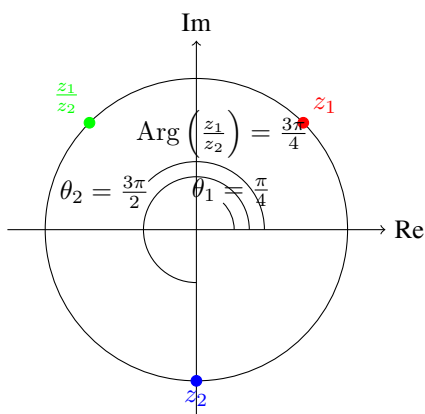
صفحه مختلط را به عنوان یک عرصه دایره‌ای تصور کنید، که هر عدد مختلط $z = re^{i\theta}$ به صورت برداری با طول r و زاویه θ از محور حقیقی مثبت نمایش داده می‌شود. ضرب دو عدد مختلط زاویه‌های آن‌ها را جمع می‌کند، و بردار اول را به اندازه زاویه دوم می‌چرخاند. اگر مجموع از π بیشتر شود، بردار دور دایره می‌چرخد و با کسر 2π تنظیم می‌شود تا در $(-\pi, \pi]$ باقی بماند. تقسیم زاویه‌ها را کم می‌کند و بردار را به عقب می‌چرخاند. این دیدگاه هندسی توضیح می‌دهد که چرا

۸.۱ آرگومان‌های ضرب و خارج قسمت

آرگومان‌ها برای ضرب جمع و برای تقسیم تفاضل می‌شوند.



شکل ۲۵.۱: نمایش آرگومان حاصل ضرب دو عدد مختلط. در اینجا، $z_1 = e^{i \cdot 3\pi/4}$ ، $z_2 = e^{i\pi}$ و $z_1 z_2 = e^{i \cdot 7\pi/4}$. از آنجا که $\frac{7\pi}{4} > \pi$ ، آرگومان اصلی برابر است با $\frac{7\pi}{4} - 2\pi = -\frac{\pi}{4}$.



شکل ۲۶.۱: نمایش آرگومان خارج قسمت دو عدد مختلط. در اینجا، $z_1 = e^{i \cdot \pi/4}$ ، $z_2 = e^{i \cdot 3\pi/2}$ و $\frac{z_1}{z_2} = e^{i(\pi/4 - 3\pi/2)} = e^{-i \cdot 5\pi/4}$. از آنجا که $-\frac{5\pi}{4} < -\pi$ ، مقدار 2π را اضافه می‌کنیم تا $-\frac{5\pi}{4} + 2\pi = \frac{3\pi}{4}$ به دست آید.

۸.۱.۱ تمرین‌ها

تمرین‌های زیر ویژگی‌های بحث‌شده را تقویت می‌کنند:

- محاسبه $((1+i)(1-i))$. پاسخ: ضرب: $(1+i)(1-i) = 2$ ، پس $(2) = 0$. به طور جایگزین، $(1+i) = \frac{\pi}{4}$ ، $(1-i) = -\frac{\pi}{4}$ ، پس $\frac{\pi}{4} + (-\frac{\pi}{4}) = 0$.

۹.۱ ریشه‌های اعداد مختلط

۲. یافتن $\left(\frac{2i}{1+i}\right)$. پاسخ: محاسبه: $\frac{2i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{2i-2i^2}{2} = \frac{2i+2}{2} = 1+i$ پس $(1+i) = \frac{\pi}{4}$ به طور جایگزین، $(2i) = \frac{\pi}{2}$ ، پس $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$
۳. محاسبه $((2+i)(3+i))$. پاسخ: ضرب: $(2+i)(3+i) = 5+5i$. آرگومان: $\tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$ به طور جایگزین، $(2+i) \approx 0.4636$ ، $(3+i) \approx 0.3218$ ، مجموع: $0.7854 \approx \frac{\pi}{4}$
۴. تأیید $\left(\frac{-1+i}{i}\right)$. پاسخ: محاسبه: $\frac{-1+i}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{i-i^2}{1} = i+1 = 1+i$ پس $(1+i) = \frac{\pi}{4}$ به طور جایگزین، $(-1+i) = \frac{3\pi}{4}$ ، پس $\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$

۹.۸.۱ تمرین‌های دشوارتر

۱. اثبات کنید که برای هر اعداد مختلط $z_1, z_2 \neq 0$ ، $(z_1 z_2) = z_1 + z_2 - 2\pi k$ ، که در آن $k = 0, \pm 1$
۲. نشان دهید که اگر $z_1 + z_2 > \pi$ ، آنگاه $(z_1 z_2) = z_1 + z_2 - 2\pi$
۳. $\left(\frac{(1+i)^2}{(1-i)^2}\right)$ را بدون محاسبه مستقیم خارج قسمت بیابید.

۹.۱ ریشه‌های اعداد مختلط

ریشه‌های اعداد مختلط راه‌حل‌های معادلاتی از فرم $w^n = z$ هستند، که در آن $z \neq 0$ یک عدد مختلط و n یک عدد صحیح مثبت است. این بخش، تعریف، استنتاج، ویژگی‌ها، مثال‌های گویا و کاربردهای این ریشه‌ها را با استفاده از شکل‌های قطبی و نمایی برای وضوح و دقت شرح می‌دهد.

۹.۱ ریشه‌های اعداد مختلط

۱.۹.۱ تعریف

برای یک عدد مختلط $z \neq 0$ و یک عدد صحیح مثبت n ، ریشه‌های n ام z اعداد مختلط w هستند که:

$$w^n = z.$$

برای هر z غیرصفر، دقیقاً n ریشه n ام متمایز وجود دارد.

در شکل قطبی، اگر $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ، که در آن $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $\theta = \arg z$ ، ریشه‌های n ام به صورت:

$$w_k = r^{1/n} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2\pi k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2\pi k}{n} \right) \right], \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

در شکل نمایی، با استفاده از فرمول اویلر $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ، این به صورت:

$$w_k = r^{1/n} e^{i(\theta + 2\pi k)/n}.$$

۲.۹.۱ استنتاج ریشه‌های n ام

برای استنتاج ریشه‌های n ام، فرض کنید $w = \rho(\cos \phi + i \sin \phi)$ معادله $w^n = z$ را برآورده کند. بر اساس قضیه دموآور:

$$w^n = \rho^n [\cos(n\phi) + i \sin(n\phi)] = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

با مساوی قرار دادن قدر مطلق‌ها و آرگومان‌ها:

۹.۱ ریشه‌های اعداد مختلط

- قدر مطلق: $\rho^n = r$ ، پس $\rho = r^{1/n}$ (زیرا $\rho > 0$).
- آرگومان: $\cos(n\phi) = \cos \theta$ ، $\sin(n\phi) = \sin \theta$ که دلالت دارد:

$$n\phi = \theta + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

بنابراین:

$$\phi = \frac{\theta + 2\pi k}{n}.$$

از آنجا که آرگومان به صورت مدول 2π تعریف می‌شود، مقادیر متمایز ϕ برای $k = 0, 1, \dots, n-1$ به دست می‌آیند، زیرا $k = n$ منجر به $\phi = \frac{\theta + 2\pi n}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi$ می‌شود که زاویه $k = 0$ را تکرار می‌کند. بنابراین، ریشه‌های ام n به صورت:

$$w_k = r^{1/n} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2\pi k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2\pi k}{n} \right) \right].$$

۳.۹.۱ ویژگی‌های اصلی

ریشه‌های ام n یک عدد مختلط ویژگی‌های زیر را نشان می‌دهند:

۱. تعداد ریشه‌ها: برای هر $z \neq 0$ ، دقیقاً n ریشه ام n متمایز وجود دارد.
۲. توزیع هندسی: ریشه‌ها روی دایره‌ای با شعاع $r^{1/n}$ در صفحه مختلط، مرکز در مبدأ، قرار دارند.
۳. فاصله زاویه‌ای: آرگومان‌های ریشه‌ها به طور مساوی با فاصله $\frac{2\pi}{n}$ رادیان، از $\frac{\theta}{n}$ شروع می‌شوند.
۴. تقارن چرخشی: ریشه‌ها رأس‌های یک چندضلعی منتظم n ضلعی را تشکیل می‌دهند که تقارن

۹.۱ ریشه‌های اعداد مختلط

چرخشی مرتبه n را منعکس می‌کند.

۴.۹.۱ مثال‌های گویا

۱. ریشه‌های مکعبی ۱ (ریشه‌های واحد): فرض کنید $z = 1 = 1 + 0i$ پس $r = 1$ ، $\theta = 0$.
ریشه‌های مکعبی به صورت:

$$w_k = 1^{1/3} \left[\cos \left(\frac{0 + 2\pi k}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi k}{3} \right) \right], \quad k = 0, 1, 2.$$

• برای $k = 0$: $\cos 0 + i \sin 0 = 1$.

• برای $k = 1$: $\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

• برای $k = 2$: $\cos \left(\frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{4\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

این ریشه‌ها، که به عنوان ریشه‌های مکعبی واحد شناخته می‌شوند، روی دایره واحد در زوایای 0° ، 120° و 240° قرار دارند.

۲. ریشه‌های مربعی i : فرض کنید $z = i = 0 + 1i$ پس $r = 1$ ، $\theta = \frac{\pi}{2}$. ریشه‌های مربعی به صورت:

$$w_k = 1^{1/2} \left[\cos \left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2} \right) \right], \quad k = 0, 1.$$

• برای $k = 0$: $\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

• برای $k = 1$: $\cos \left(\frac{5\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

بنابراین، ریشه‌های مربعی $\pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ هستند.

۹.۱ ریشه‌های اعداد مختلط

۳. ریشه‌های مکعبی $8i$: فرض کنید $z = 8i = 0 + 8i$ ، پس $r = 8$ ، $\theta = \frac{\pi}{2}$. ریشه‌های مکعبی به صورت:

$$w_k = 8^{1/3} \left[\cos \left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} \right) \right]$$

$$= 2 \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3} \right) \right], \quad k = 0, 1, 2.$$

- برای $k = 0$: $2 \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right] = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} + i$
- برای $k = 1$: $2 \left[\cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} \right) \right] = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = -\sqrt{3} + i$
- برای $k = 2$: $2 \left[\cos \left(\frac{3\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{2} \right) \right] = 2(0 - i) = -2i$

بنابراین، ریشه‌های مکعبی $\sqrt{3} + i$ ، $-\sqrt{3} + i$ و $-2i$ هستند.

۵.۹.۱ نتایج و کاربردها

- نتیجه: ریشه‌های واحد: ریشه‌های n ام، 1 ، که به عنوان ریشه‌های n ام واحد شناخته می‌شوند، به صورت $e^{i2\pi k/n}$ ، برای $k = 0, 1, \dots, n-1$ داده می‌شوند. آن‌ها تحت ضرب یک گروه چرخه‌ای تشکیل می‌دهند، مفهومی که در مطالعات جبری بعدی بررسی می‌شود.
- کاربردها: یافتن ریشه‌ها برای حل معادلات چندجمله‌ای مانند $z^n - a = 0$ ضروری است، که در نظریه کنترل، پردازش سیگنال و مکانیک کوانتومی مطرح می‌شوند. در مهندسی برق، ریشه‌ها تغییرات فاز در سیستم‌های نوسانی را مدل می‌کنند، در حالی که در فیزیک، تقارن‌ها در توابع موج را توصیف می‌کنند.

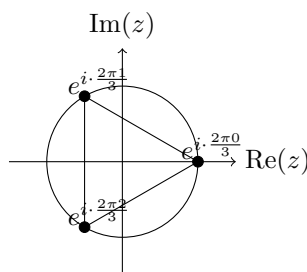
۹.۱ ریشه‌های اعداد مختلط

۶.۹.۱ زمینه تاریخی

مفهوم ریشه‌های مختلط در قرن شانزدهم پدید آمد، زمانی که ژرولامو کاردانو در حین حل معادلات مکعبی با اعداد موهومی مواجه شد. در قرن هجدهم، آبراهام دمواور و لئونارد اویلر نمایش قطبی و قضیه دمواور را رسمی کردند، که محاسبه سیستماتیک ریشه‌های n ام را ممکن ساخت. کار آن‌ها، همان‌طور که در گزارش‌های تاریخی مانند [قضیه دمواور] ذکر شده، بنیان تحلیل مختلط مدرن را تشکیل داد.

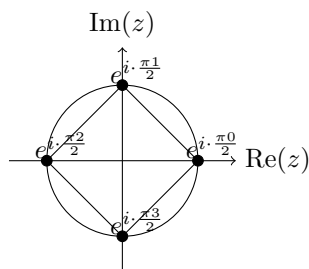
۷.۹.۱ شهود

صفحه مختلط را به عنوان یک عرصه دایره‌ای تصور کنید، با محور حقیقی افقی و محور موهومی عمودی. برای یک عدد مختلط $z = re^{i\theta}$ ، ریشه‌های n ام آن n نقطه هستند که به طور مساوی روی دایره‌ای با شعاع $r^{1/n}$ ، مرکز در مبدأ، قرار دارند. از زاویه θ/n شروع می‌شود و هر ریشه بعدی با چرخش $2\pi/n$ رادیان به دست می‌آید، که یک چندضلعی منتظم n ضلعی را تشکیل می‌دهد. به عنوان مثال، ریشه‌های مکعبی ۱ در زوایای 0° ، 120° و 240° قرار دارند، شبیه به یک مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایره واحد، که تقارن و دوره‌ای بودن ریشه‌ها را نشان می‌دهد.

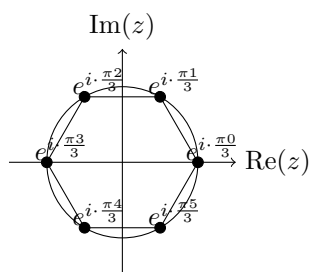


شکل ۲۷.۱: ریشه‌های سوم واحد در صفحه مختلط، که یک مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایره واحد تشکیل می‌دهند. ریشه‌ها عبارتند از $1 = e^{i \cdot 0}$ ، $e^{i \cdot \frac{2\pi}{3}}$ و $e^{i \cdot \frac{4\pi}{3}}$ ، که با فاصله‌های برابر در زوایای 0° ، 120° و 240° قرار دارند.

۹.۱ ریشه‌های اعداد مختلط

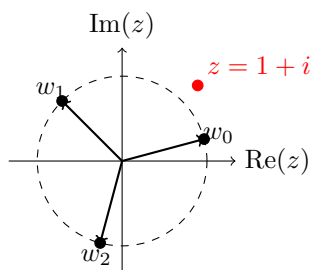


شکل ۲۸.۱: ریشه‌های چهارم واحد در صفحه مختلط، که یک مربع محاط در دایره واحد تشکیل می‌دهند. ریشه‌ها عبارتند از $e^{i \cdot 0} = 1$ ، $e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} = i$ ، $e^{i \cdot \pi} = -1$ ، و $e^{i \cdot \frac{3\pi}{2}} = -i$ در زوایای 0° ، 90° ، 180° و 270° .



شکل ۲۹.۱: ریشه‌های ششم واحد در صفحه مختلط، که یک شش ضلعی منتظم محاط در دایره واحد تشکیل می‌دهند. ریشه‌ها در زوایای 0° ، 60° ، 120° ، 180° ، 240° و 300° قرار دارند، که معادل $e^{i \cdot \frac{\pi k}{3}}$ برای $k = 0, 1, \dots, 5$ هستند.

۹.۱ ریشه‌های اعداد مختلط



شکل ۳۰.۱: ریشه‌های سوم $z = 1 + i$ با مقدار مطلق $|z| = \sqrt{2}$ ، بنابراین ریشه‌ها روی دایره‌ای با شعاع $2^{1/6}$ قرار دارند. زوایا برابرند با $(45^\circ + 360^\circ k)/3 = 15^\circ + 120^\circ k$ برای $k = 0, 1, 2$ ، که معادل 15° ، 135° و 255° هستند. ریشه w_0 در 15° اغلب به عنوان ریشه اصلی در نظر گرفته می‌شود. عدد اصلی z برای مرجع به رنگ قرمز نشان داده شده است.

۸.۹.۱ تمرین‌ها

۱. تمام ریشه‌های چهارم -16 را بیابید. پاسخ: $-16 = -16 + 0i$ ، پس $r = 16$ ، $\theta = \pi$. ریشه‌های چهارم:

$$w_k = 16^{1/4} \left[\cos \left(\frac{\pi + 2\pi k}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi + 2\pi k}{4} \right) \right]$$

$$= 2 \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \right) \right], \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

- برای $k = 0$: $2 \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right] = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$
- برای $k = 1$: $2 \left[\cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right) \right] = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$
- برای $k = 2$: $2 \left[\cos \left(\frac{5\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{4} \right) \right] = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$
- برای $k = 3$: $2 \left[\cos \left(\frac{7\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{4} \right) \right] = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

بنابراین، ریشه‌های چهارم $\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$ ، $-\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$ هستند.

۲. تمام ریشه‌های مکعبی $8i$ را بیابید. پاسخ: $8i = 0 + 8i$ ، پس $r = 8$ ، $\theta = \frac{\pi}{2}$. ریشه‌های

۹.۱ ریشه‌های اعداد مختلط

مکعبی:

$$w_k = 8^{1/3} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3} \right) \right]$$

$$= 2 \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3} \right) \right], \quad k = 0, 1, 2.$$

• برای $k = 0$: $2 \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right] = \sqrt{3} + i$

• برای $k = 1$: $2 \left[\cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} \right) \right] = -\sqrt{3} + i$

• برای $k = 2$: $2 \left[\cos \left(\frac{3\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{2} \right) \right] = -2i$

بنابراین، ریشه‌های مکعبی $\sqrt{3} + i$ ، $-\sqrt{3} + i$ و $-2i$ هستند.

۳. تأیید کنید که مجموع ریشه‌های مکعبی واحد صفر است. پاسخ: از مثال ۱، ریشه‌های مکعبی ۱ عبارتند از 1 ، $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. مجموع آن‌ها:

$$1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

۹.۹.۱ تمرین‌های دشوارتر

۱. تمام اعداد مختلط z را بیابید که $z^4 = -1 + i$.

۲. اثبات کنید که مجموع تمام ریشه‌های n ام یک عدد مختلط $z \neq 0$ صفر است اگر $n > 1$.

۳. نشان دهید که ریشه‌های n ام واحد تحت ضرب یک گروه چرخه‌ای تشکیل می‌دهند.

۴. تمام راه‌حل‌های $z^5 = 32$ را بیابید.

۱۰.۱ مثال‌ها

زیرموضوع ۱۰ به عنوان مجموعه‌ای از مثال‌های کارشده عمل می‌کند که مفاهیم اعداد مختلط معرفی شده را به کار می‌برند. این‌ها شامل جمع و ضرب، ویژگی‌های جبری، بردارها و قدر مطلق‌ها، مزدوج‌های مختلط، شکل نمایی، ضرب و توان، آرگومان‌ها و ریشه‌ها می‌شوند. مثال‌های زیر این اصول را از طریق مسائل عملی نشان می‌دهند و رفتار و اهمیت آن‌ها را در زمینه‌های ریاضی و کاربردی برجسته می‌کنند.

۱۰.۱.۱ مثال ۱: عملیات‌های پایه

اعداد مختلط $z_1 = 3 + 4i$ و $z_2 = 1 - 2i$ را در نظر بگیرید.

جمع:

$$z_1 + z_2 = (3 + 1) + (4 - 2)i = 4 + 2i$$

این عملیات بخش‌های حقیقی و موهومی را به طور جداگانه ترکیب می‌کند، مشابه جمع بردارها در صفحه مختلط.

ضرب:

$$z_1 \cdot z_2 = (3)(1) + (3)(-2i) + (4i)(1) + (4i)(-2i) = 3 - 6i + 4i - 8i^2$$

از آنجا که $i^2 = -1$ ، این به صورت زیر ساده می‌شود:

$$3 - 6i + 4i + 8 = 11 - 2i$$

این مثال دستکاری جبری اعداد مختلط را نشان می‌دهد که برای عملیات‌های بعدی بنیادی است.

۲.۱۰.۱ مثال ۲: قدر مطلق و آرگومان

برای $z = -3 + 3i$ ، قدر مطلق و آرگومان اصلی را محاسبه کنید.

قدر مطلق:

$$|z| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

قدر مطلق فاصله از مبدأ در صفحه مختلط را نشان می‌دهد.

آرگومان اصلی: از آنجا که z در ربع دوم قرار دارد ($x = -3 < 0$ ، $y = 3 > 0$):

$$\theta = \pi - \tan^{-1} \left(\frac{3}{3} \right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

آرگومان زاویه‌ای از محور حقیقی مثبت را نشان می‌دهد که برای نمایش‌های قطبی و نمایی ضروری است.

۳.۱۰.۱ مثال ۳: شکل نمایی

$z = -1 - i$ را به شکل نمایی بیان کنید.

قدر مطلق:

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

آرگومان اصلی: از آنجا که z در ربع سوم قرار دارد ($x = -1 < 0$, $y = -1 < 0$):

$$\theta = -\pi + \tan^{-1} \left(\frac{-1}{-1} \right) = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$$

بنابراین:

$$z = \sqrt{2}e^{-i3\pi/4}$$

شکل نمایی عملیات‌هایی مانند ضرب و توان را با استفاده از قدر مطلق و آرگومان ساده می‌کند.

۴.۱۰.۱ مثال ۴: توان در شکل نمایی

$(1 + i)^4$ را با استفاده از شکل نمایی محاسبه کنید.

ابتدا، $1 + i$ را به شکل نمایی تبدیل کنید:

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{1}{1} \right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{پس، } 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

سپس:

$$(1 + i)^4 = \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4} \right)^4 = (\sqrt{2})^4 e^{i4\pi/4} = 4e^{i\pi}$$

$$\text{از آنجا که } e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$4e^{i\pi} = 4(-1) = -4$$

این نشان می‌دهد که شکل نمایی برای محاسبه توان‌ها کارآمد است و ضرب‌های پیچیده را به عملیات روی قدر مطلق‌ها و آرگومان‌ها کاهش می‌دهد.

۵.۱۰.۱ مثال ۵: ریشه‌های اعداد مختلط

ریشه‌های مکعبی $8i$ را بیابید.

$8i = 0 + 8i$ را به شکل نمایی بیان کنید:

$$r = 8, \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

پس، $8i = 8e^{i\pi/2}$.

ریشه‌های مکعبی:

$$w_k = 8^{1/3} e^{i(\pi/2 + 2\pi k)/3} = 2e^{i(\pi/6 + 2\pi k/3)}, \quad k = 0, 1, 2$$

هر ریشه را محاسبه کنید:

• برای $k = 0$:

$$w_0 = 2 \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right] = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} + i$$

• برای $k = 1$:

$$w_1 = 2 \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} \right) \right] = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) = -\sqrt{3} + i$$

• برای $k = 2$:

$$w_2 = 2 \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{2} \right) \right] = 2(0 - i) = -2i$$

این ریشه‌ها روی دایره‌ای با شعاع ۲، با فاصله ۱۲۰ درجه از یکدیگر قرار دارند و تقارن هندسی ریشه‌های مختلط را نشان می‌دهند.

۶.۱۰.۱ مثال ۶: حل معادلات درجه دوم

معادله درجه دوم $z^2 - 2z + (1 + i) = 0$ را حل کنید.

با استفاده از فرمول کوادرات:

$$z = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1 + i)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 - 4i}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4i}}{2} = 1 \pm \sqrt{-i}$$

برای یافتن $\sqrt{-i}$ ، فرض کنید $w = \sqrt{-i}$ ، پس $w^2 = -i$. فرض کنید $w = a + bi$:

$$(a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi = -i$$

بخش‌های حقیقی و موهومی را مساوی قرار دهید:

$$a^2 - b^2 = 0, \quad 2ab = -1$$

از $a^2 = b^2$, $a = \pm b$. اگر $a = b$, آنگاه $2a^2 = -1$ ، که غیرممکن است. اگر $a = -b$:

$$2a(-a) = -1 \implies -2a^2 = -1 \implies a^2 = \frac{1}{2} \implies a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad b = \mp \frac{\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین، $w = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ یا $w = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

پس، راه‌حل‌ها عبارتند از:

$$z_1 = 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_2 = 1 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

این مثال معادلات درجه دوم حقیقی را به حوزه مختلط گسترش می‌دهد و سودمندی ریشه‌های

مختلط را نشان می‌دهد.

۷.۱۰.۱ نتایج و کاربردها

این مثال‌ها کاربردهای کلیدی را نشان می‌دهند:

- **دستکاری جبری:** عملیات‌های پایه (مثال ۱) برای تمام محاسبات اعداد مختلط بنیادی هستند.
- **تفسیر هندسی:** قدر مطلق و آرگومان (مثال ۲) دیدگاه هندسی ارائه می‌دهند که برای مختصات قطبی ضروری است.
- **ساده‌سازی عملیات‌ها:** شکل نمایی (مثال‌های ۳ و ۴) ضرب و توان را ساده می‌کند.
- **حل معادلات:** ریشه‌ها (مثال ۵) و معادلات درجه دوم (مثال ۶) در حل معادلات چندجمله‌ای حیاتی هستند، با کاربردهایی در نظریه کنترل، پردازش سیگنال و مکانیک کوانتومی.
- در مهندسی برق، این تکنیک‌ها فاز و دامنه را در مدارها مدل می‌کنند. در فیزیک، پدیده‌های موجی را توصیف می‌کنند و از تقارن ریشه‌ها بهره می‌برند.

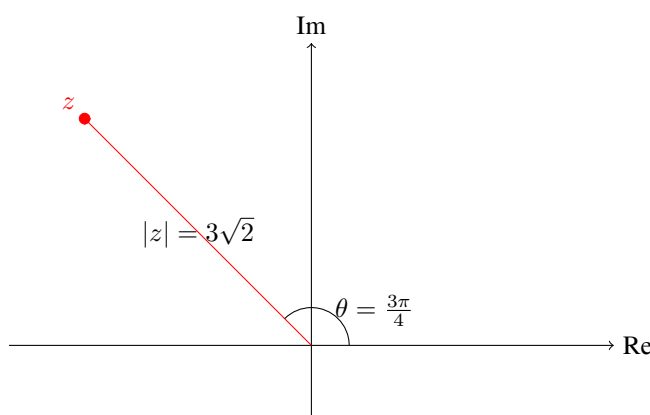
۸.۱۰.۱ زمینه تاریخی

توسعه اعداد مختلط در قرن شانزدهم با کار ژرولامو کاردانو بر روی معادلات مکعبی آغاز شد، که اعداد موهومی را معرفی کرد. در قرن هجدهم، اویلر و دموور شکل‌های قطبی و نمایی را رسمی کردند، که محاسبه ریشه‌ها و توان‌ها را ممکن ساخت. گاوس و کوشی تحلیل مختلط را بیشتر پالایش دادند و این مثال‌ها را به ابزارهای عملی برای حل معادلات و مدل‌سازی سیستم‌های فیزیکی تبدیل

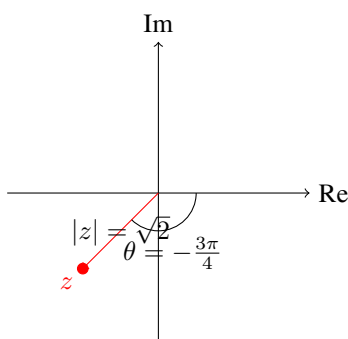
کردند، همان‌طور که در گزارش‌های تاریخی توسعه تحلیل مختلط ذکر شده است.

۹.۱۰.۱ شهود

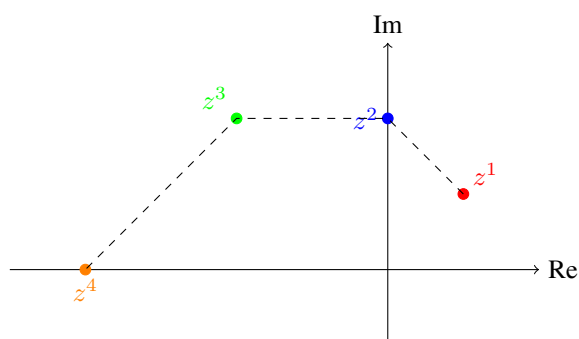
صفحه مختلط را به عنوان یک بوم دوبعدی تصور کنید، با محور حقیقی افقی و محور موهومی عمودی. در مثال ۱، جمع $3 + 4i$ و $1 - 2i$ متناظر با جمع بردارها است و به $(4, 2)$ می‌رسد. در مثال ۲، قدر مطلق $-3 + 3i$ فاصله $3\sqrt{2}$ از مبدأ است، با زاویه 135° . ریشه‌های مکعبی $8i$ در مثال ۵ یک مثلث متساوی‌الاضلاع روی دایره‌ای با شعاع ۲ تشکیل می‌دهند، با رأس‌ها در زوایای 30° ، 150° و 270° ، که تقارن چرخشی ریشه‌های مختلط را نشان می‌دهد.



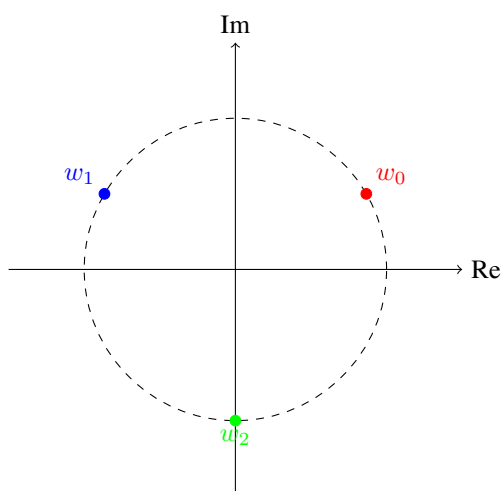
شکل ۳۱.۱: مقدار مطلق و آرگومان اصلی $z = -3 + 3i$. مقدار مطلق برابر $3\sqrt{2}$ و آرگومان برابر $\frac{3\pi}{4}$ است.



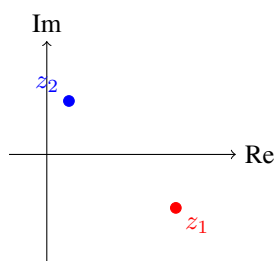
شکل ۳۲.۱: نمایش $z = -1 - i$ در صفحه مختلط، که مقدار مطلق $\sqrt{2}$ و آرگومان اصلی $-\frac{3\pi}{4}$ را نشان می‌دهد، متناظر با شکل نمایی $z = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$.



شکل ۳۳.۱: توان‌های $z = 1 + i$ عبارتند از: $z^1 = 1 + i$, $z^2 = 2i$, $z^3 = -2 + 2i$, $z^4 = -4$. هر توان مقدار مطلق را به اندازه $(\sqrt{2})^n$ مقیاس می‌کند و آرگومان را به اندازه $n \times \frac{\pi}{4}$ می‌چرخاند.



شکل ۳۴.۱: ریشه‌های سوم $8i$ عبارتند از: $w_0 = \sqrt{3} + i$, $w_1 = -\sqrt{3} + i$, $w_2 = -2i$ که روی دایره‌ای با شعاع ۲ در صفحه مختلط قرار دارند.



شکل ۳۵.۱: حل‌های معادله درجه دوم $z^2 - 2z + (1 + i) = 0$ عبارتند از: $z_1 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $z_2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

تمرین‌های زیر، الهام‌گرفته از مسائل معمول در تحلیل مختلط، مفاهیم نشان داده‌شده را تقویت می‌کنند:

۱. $(2 + 3i) + (4 - i)$ و $(2 + 3i) \cdot (4 - i)$ را محاسبه کنید. پاسخ:

• جمع: $(2 + 4) + (3 - 1)i = 6 + 2i$

• ضرب: $2 \cdot 4 + 2 \cdot (-i) + 3i \cdot 4 + 3i \cdot (-i) = 8 - 2i + 12i - 3i^2 = 8 + 10i + 3 = 11 + 10i$

۲. قدر مطلق و آرگومان اصلی $z = -3 + 3i$ را بیابید. پاسخ:

• قدر مطلق: $|z| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

• آرگومان: $\theta = \pi - \tan^{-1}(1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

۳. $z = -1 - i$ را به شکل نمایی بیان کنید. پاسخ:

• قدر مطلق: $r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

• آرگومان: $\theta = -\pi + \tan^{-1}(1) = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$

• بنابراین، $z = \sqrt{2}e^{-i3\pi/4}$

۴. $(1 + i)^4$ را با استفاده از شکل نمایی محاسبه کنید. پاسخ:

• $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$

• $(1 + i)^4 = (\sqrt{2})^4 e^{i4 \cdot \pi/4} = 4e^{i\pi} = 4(-1) = -4$

۱۱.۱ مناطق در صفحه مختلط

۵. تمام ریشه‌های چهارم ۱۶ را بیابید. پاسخ:

• $16 = 16e^{i0}$ ، پس $r = 16$ ، $\theta = 0$

• ریشه‌ها: $w_k = 16^{1/4} e^{i(0+2\pi k)/4} = 2e^{ik\pi/2}$ برای $k = 0, 1, 2, 3$

• $2e^{i0} = 2 : k = 0$

• $2e^{i\pi/2} = 2i : k = 1$

• $2e^{i\pi} = -2 : k = 2$

• $2e^{i3\pi/2} = -2i : k = 3$

۱۱.۱.۱ تمرین‌های دشوارتر

۱. $z^3 = 1 + i$ را حل کنید.

۲. تمام اعداد مختلط z را بیابید که $z^2 = \bar{z}$.

۳. اثبات کنید که ریشه‌های یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی به صورت جفت‌های مزدوج می‌آیند.

۱۱.۱ مناطق در صفحه مختلط

مناطق در صفحه مختلط برای تحلیل مختلط اساسی هستند و حوزه‌هایی را که توابع در آن‌ها تعریف و تحلیل می‌شوند، فراهم می‌کنند. این بخش مفاهیم توپولوژیکی، ویژگی‌ها، مثال‌های گویا و کاربردهای مناطق را بررسی می‌کند.

۱۱.۱ مناطق در صفحه مختلط

۱.۱۱.۱ مفاهیم توپولوژیکی پایه

برای درک مناطق، ابتدا مفاهیم توپولوژیکی ضروری در صفحه مختلط $\mathbb{C}$ ، که هم‌ریخت با صفحه اقلیدسی $\mathbb{R}^2$ است، تعریف می‌کنیم.

همسایگی

برای یک نقطه $z_0 \in \mathbb{C}$ و $\varepsilon > 0$ ، همسایگی z_0 ، که با $N(z_0, \varepsilon)$ نشان داده می‌شود، به صورت:

$$N(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$$

است، یک دیسک باز با مرکز z_0 و شعاع ε .

همسایگی حذف‌شده

همسایگی حذف‌شده z_0 ، که با $N'(z_0, \varepsilon)$ نشان داده می‌شود، به صورت:

$$N'(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$$

است، یک دیسک باز بدون نقطه z_0 .

نقطه داخلی

نقطه z_0 یک نقطه داخلی مجموعه $S \subset \mathbb{C}$ است اگر وجود داشته باشد $\varepsilon > 0$ به طوری که $N(z_0, \varepsilon) \subset S$.

نقطه خارجی

نقطه z_0 یک نقطه خارجی مجموعه S است اگر وجود داشته باشد $\varepsilon > 0$ به طوری که $N(z_0, \varepsilon) \cap S = \emptyset$.

نقطه مرزی

نقطه z_0 یک نقطه مرزی مجموعه S است اگر نه نقطه داخلی باشد و نه خارجی. به عبارت دیگر، هر همسایگی $N(z_0, \varepsilon)$ حداقل یک نقطه در S و یک نقطه خارج از S دارد. مجموعه نقاط مرزی با ∂S نشان داده می‌شود.

مجموعه باز

مجموعه S باز است اگر هیچ‌یک از نقاط مرزی خود را شامل نشود، یا به طور معادل، اگر هر نقطه در S یک نقطه داخلی باشد.

مجموعه بسته

مجموعه S بسته است اگر تمام نقاط مرزی خود را شامل شود.

بستار

بستار مجموعه S ، که با $\overline{S}$ نشان داده می‌شود، به صورت:

$$\overline{S} = S \cup \partial S$$

است و شامل تمام نقاط S و مرز آن می‌شود.

۱۱.۱ مناطق در صفحه مختلط

۲.۱۱.۱ متصل بودن و نواحی

مجموعه متصل

مجموعه $S \subset \mathbb{C}$ متصل است اگر نتوان آن را به اتحاد دو مجموعه باز غیرخالی و جدا از هم تقسیم کرد. در $\mathbb{C}$ ، مجموعه‌ای متصل است اگر هر دو نقطه در S را بتوان با یک خط چندضلعی (دنباله‌ای از پاره‌خط‌ها) که کاملاً در S قرار دارد، به هم متصل کرد.

ناحیه

ناحیه مجموعه‌ای غیرخالی، باز و متصل از $\mathbb{C}$ است. نواحی در تحلیل مختلط حیاتی هستند زیرا اغلب به عنوان حوزه‌های توابع تحلیلی عمل می‌کنند.

۳.۱۱.۱ مناطق

منطقه در صفحه مختلط یک ناحیه به همراه برخی، هیچ‌یک یا همه نقاط مرزی آن است. بنابراین، یک منطقه همیشه متصل است اما ممکن است باز (اگر هیچ نقطه مرزی نداشته باشد)، بسته (اگر همه نقاط مرزی را شامل شود) یا هیچ‌کدام باشد.

۴.۱۱.۱ مجموعه‌های کران‌دار و بی‌کران

مجموعه S کران‌دار است اگر وجود داشته باشد $R > 0$ به طوری که $S \subset \{z : |z| < R\}$ ، یعنی در دیسکی جای گیرد. در غیر این صورت، S بی‌کران است.

۱۱.۱ مناطق در صفحه مختلط

۵.۱۱.۱ نقاط انباشت و منفرد

نقطه انباشت مجموعه S نقطه‌ای z_0 است که هر همسایگی حذف شده $N'(z_0, \varepsilon)$ حداقل یک نقطه از S را شامل شود. نقطه منفرد مجموعه S نقطه‌ای $z_0 \in S$ است که همسایگی حذف شده‌ای $N'(z_0, \varepsilon)$ وجود داشته باشد که با S اشتراک نداشته باشد.

۶.۱۱.۱ مثال‌های گویا

مثال‌های زیر این مفاهیم را روشن می‌کنند:

۱. دیسک واحد

• دیسک واحد باز: $D = \{z : |z| < 1\}$

– نقاط داخلی: همه z که $|z| < 1$.

– نقاط مرزی: $\{z : |z| = 1\}$.

– ویژگی‌ها: باز، متصل، کران‌دار، یک ناحیه.

• دیسک واحد بسته: $\overline{D} = \{z : |z| \leq 1\}$

– شامل مرز، بنابراین بسته، متصل، کران‌دار، یک منطقه.

۲. صفحه سوراخ شده

• مجموعه: $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

• ویژگی‌ها: باز، متصل، بی‌کران، یک ناحیه.

۱۱.۱ مناطق در صفحه مختلط

• نقطه انباشت: $z = 0$ ، اگرچه در مجموعه نیست.

• مرز: هیچ در $\mathbb{C}$.

۳. نیم صفحه راست

• مجموعه: $\{z : \operatorname{Re}(z) > 0\}$

• ویژگی‌ها: باز، متصل، بی کران، یک ناحیه.

• مرز: $\{z : \operatorname{Re}(z) = 0\}$ (محور موهومی).

۴. حلقه

• مجموعه: $\{z : 1 < |z| < 2\}$

• ویژگی‌ها: باز، متصل، کران دار، یک ناحیه.

• مرز: دایره‌ها $\{z : |z| = 1\}$ و $\{z : |z| = 2\}$.

۵. مجموعه با نقطه منفرد

• مجموعه: $S = \{z : |z| < 1\} \cup \{2\}$

• نقطه منفرد: $z = 2$.

• نقاط داخلی: $\{z : |z| < 1\}$.

• نقاط مرزی: $\{z : |z| = 1\} \cup \{2\}$.

• نقاط انباشت: $\{z : |z| \leq 1\}$.

• ویژگی‌ها: نه باز، نه بسته، نه متصل.

۱۱.۱ مناطق در صفحه مختلط

۷.۱۱.۱ کاربردها

مناطق در تحلیل مختلط نقش محوری دارند و حوزه‌هایی را که توابع تحلیلی در آن‌ها تعریف می‌شوند، مشخص می‌کنند. قضیه‌هایی مانند قضیه انتگرال کوشی به مناطق ساده‌متصل نیاز دارند، در حالی که نگاشت‌های هم‌دیس مسائل را در دینامیک سیالات و الکترواستاتیک حل می‌کنند. در مهندسی برق، مناطق حوزه‌های پایداری سیگنال‌ها را مدل می‌کنند، و در فیزیک، نواحی انتشار امواج را توصیف می‌کنند.

۸.۱۱.۱ زمینه تاریخی

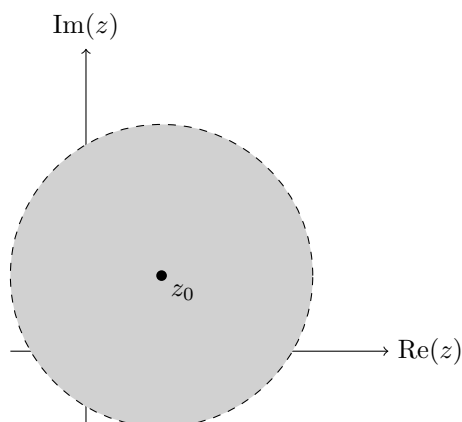
چارچوب توپولوژیکی برای مناطق در صفحه مختلط در قرن نوزدهم از طریق کارهای آگوستین-لویی کوشی، که قضیه‌های انتگرال را توسعه داد، و برنهارد ریمان، که سطوح ریمان را معرفی کرد، پدید آمد. رسمی‌سازی مجموعه‌های باز و بسته توسط موریس فرشه و فلیکس هوسدورف در اوایل قرن بیستم، پایه‌ای دقیق برای تحلیل مختلط مدرن فراهم کرد.

۹.۱۱.۱ شهود

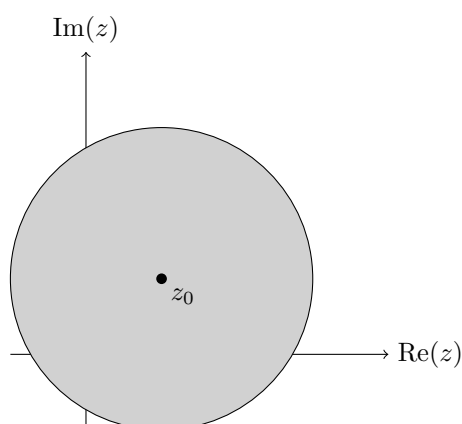
صفحه مختلط را به عنوان یک بوم دوبعدی تصور کنید، با محور حقیقی افقی و محور موهومی عمودی. یک دیسک باز $|z - a| < r$ ناحیه‌ای دایره‌ای با مرکز a است، بدون مرز خود، مانند یک دشت باز. نیم‌صفحه راست $\text{Re}(z) > 0$ به طور بی‌کران از محور موهومی به سمت راست امتداد می‌یابد، شبیه یک دشت بی‌پایان. یک نوار $a < \text{Im}(z) < b$ باند افقی است، مانند رودی بین دو ساحل موازی. این تصاویر ماهیت هندسی مناطق را روشن می‌کنند و تحلیل آن‌ها را تسهیل

۱۱.۱ مناطق در صفحه مختلط

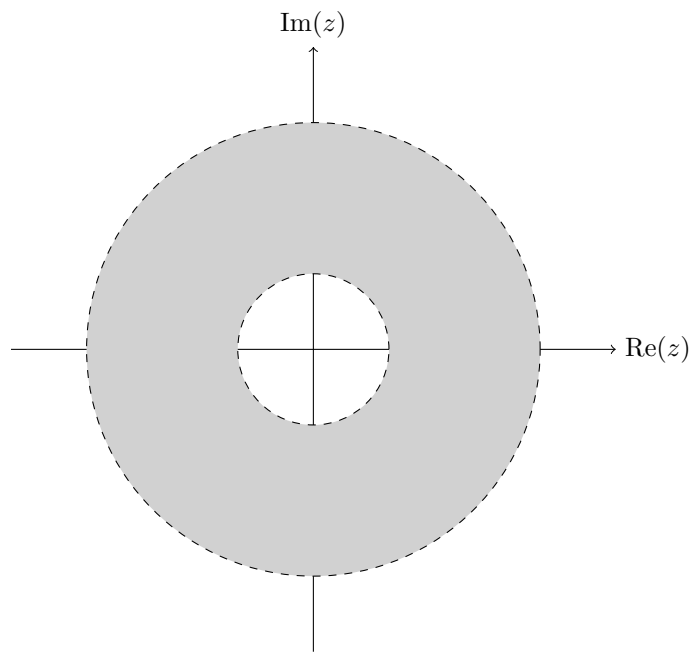
می‌کنند.



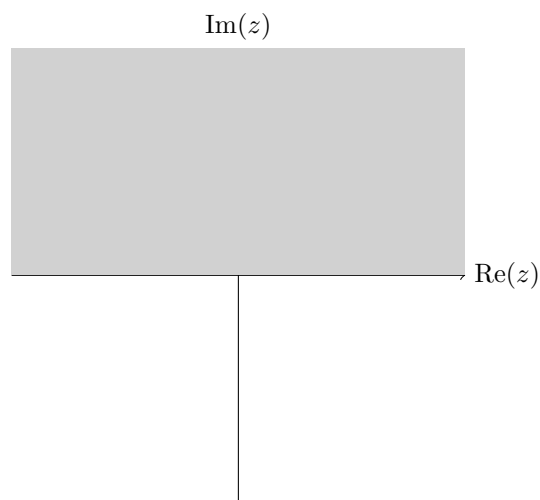
شکل ۳۶.۱: دیسک باز با مرکز $z_0 = 1 + i$ و شعاع $r = 2$ ، تعریف شده توسط $|z - z_0| < 2$. مرز خط چین نشان می‌دهد که نقاط روی مرز در ناحیه شامل نمی‌شوند.



شکل ۳۷.۱: دیسک بسته با مرکز $z_0 = 1 + i$ و شعاع $r = 2$ ، تعریف شده توسط $|z - z_0| \leq 2$. مرز پیوسته نشان می‌دهد که نقاط روی مرز در ناحیه شامل می‌شوند.

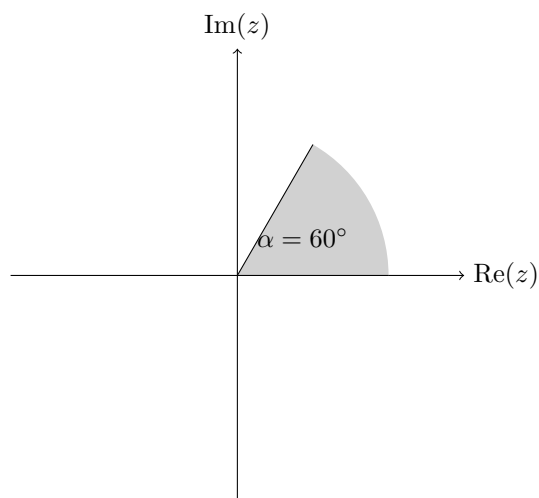


شکل ۳۸.۱: حلقه‌ای با مرکز مبدا با شعاع داخلی $r = 1$ و شعاع خارجی $R = 3$ ، تعریف شده توسط $1 < |z| < 3$. مرزهای خط‌چین نشان می‌دهند که نقاط روی دایره‌ها شامل نمی‌شوند.

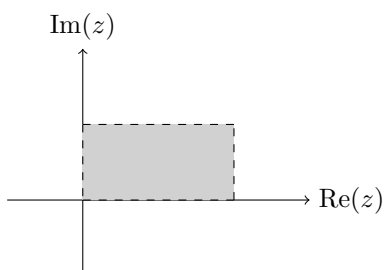


شکل ۳۹.۱: نیم‌صفحه بالایی، تعریف شده توسط $\text{Im}(z) > 0$. این ناحیه شامل تمام نقاط بالای محور حقیقی است.

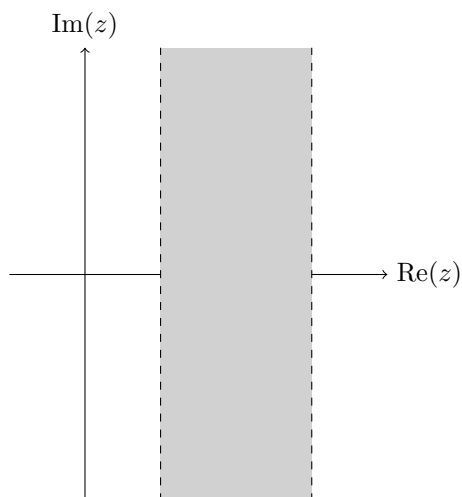
۱۱.۱ مناطق در صفحه مختلط



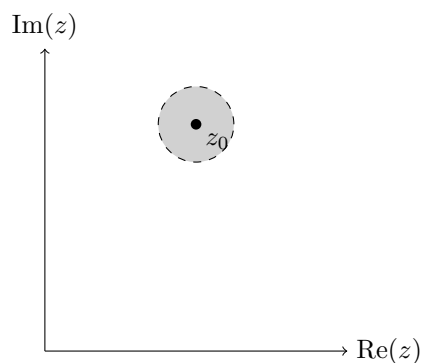
شکل ۴۰.۱: بخشی در صفحه مختلط با زاویه $\alpha = 60^\circ$ و شعاع تا ۲، تعریف شده توسط $0 < \arg z < \frac{\pi}{3}$ و $0 < |z| < 2$.



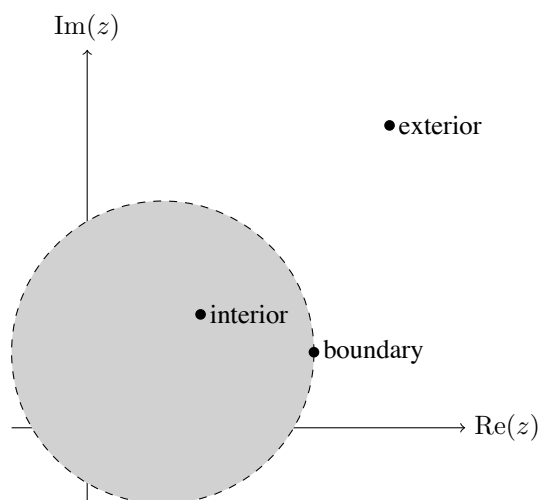
شکل ۴۱.۱: ناحیه مستطیلی تعریف شده توسط $0 < \operatorname{Re}(z) < 2$ و $0 < \operatorname{Im}(z) < 1$. مرزهای خطچین نشان می‌دهند که لبه‌ها در ناحیه شامل نمی‌شوند.



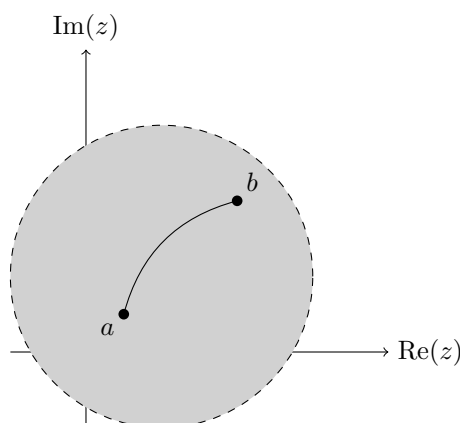
شکل ۴۲.۱: نوار عمودی تعریف شده توسط $1 < \operatorname{Re}(z) < 3$. خطوط خطچین نشان می‌دهند که مرزها شامل نمی‌شوند.



شکل ۴۳.۱: همسایگی ϵ از $z_0 = 2 + 3i$ با $\epsilon = 0.5$ ، تعریف شده توسط $|z - z_0| < 0.5$.



شکل ۴۴.۱: طبقه‌بندی نقاط نسبت به دیسک باز $|z - (1 + i)| < 2$. نقطه $(1.5, 1.5)$ درونی است ($|z - (1 + i)| \approx 0.707 < 2$), نقطه $(3, 1)$ روی مرز است ($|z - (1 + i)| = 2$), و نقطه $(4, 4)$ بیرونی است ($|z - (1 + i)| \approx 4.243 > 2$).



شکل ۴۵.۱: مثالی از یک حوزه مسیر-متصل: دیسک باز $|z - (1 + i)| < 2$. نقاط a و b درون دیسک توسط یک مسیر پیوسته در داخل دیسک به هم متصل می‌شوند، که مسیر-متصل بودن را نشان می‌دهد.

۱۰.۱۱.۱ تمرین‌ها

۱. تعیین کنید که آیا $S = \{z : |z| < 2\}$ باز است یا بسته. پاسخ: S باز است، زیرا هر نقطه $z \in S$ دارای همسایگی $N(z, \varepsilon) \subset S$ است.

۲. مرز $S = \{z : \text{Im}(z) > 0\}$ را بیابید. پاسخ: مرز $\partial S = \{z : \text{Im}(z) = 0\}$ ، محور حقیقی است.

۳. آیا $S = \{z : |z| = 1\}$ باز، بسته یا هیچ‌کدام است؟ پاسخ: هیچ‌کدام. فاقد نقاط داخلی (نه باز) و مرز خود را شامل می‌شود (نه بسته).

۴. تعیین کنید که آیا $S = \mathbb{C}$ متصل است. پاسخ: بله، صفحه مختلط متصل است.

۵. نقاط انباشت $S = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ را شناسایی کنید. پاسخ: تنها نقطه انباشت 0 است، زیرا هر همسایگی 0 شامل نقاطی از S است.

۶. آیا $z = 0$ یک نقطه منفرد از $S = \{z : |z| > 1\}$ است؟ پاسخ: خیر، زیرا $0 \notin S$.

۱۱.۱ مناطق در صفحه مختلط

۱۱.۱.۱ تمرین‌های دشوارتر

۱. مجموعه $S = \{z : |z - 1| < |z + 1|\}$ را توصیف کنید.
۲. تعیین کنید که آیا $S = \{z : \operatorname{Re}(z) > 0\} \cup \{z : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ متصل است.
۳. نقاطی را بیابید که $S = \{z : |z| < 1\} \cup \{z : |z - 2| < 1\}$ غیرمتصل است.
۴. اثبات کنید که بستار یک دیسک باز، دیسک بسته است.

فصل ۲

توابع تحلیلی

۱.۲ توابع متغیر مختلط

۱.۱.۲ تعریف

تابع f از یک متغیر مختلط قاعده‌ای است که به هر عدد مختلط z در مجموعه‌ای به نام دامنه، یعنی S ، یک عدد مختلط یکتا w را نسبت می‌دهد. برای $z = x + iy$ ، که در آن $x, y \in \mathbb{R}$ و $i^2 = -1$ ، می‌نویسیم:

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

۱.۲ توابع متغیر مختلط

که در آن $u(x, y)$ و $v(x, y)$ توابع با مقدار حقیقی هستند که به ترتیب بخش‌های حقیقی و موهومی را نشان می‌دهند. در مختصات قطبی، که در آن $z = re^{i\theta}$ ، تابع به صورت:

$$f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta).$$

بیان می‌شود. تابع یک‌مقداری است اگر هر $z \in S$ به یک w نگاشت شود، یا چندمقداری است که نیاز به شاخه‌ای برای تعریف مقدار یکتا دارد.

۲.۱.۲ خواص اصلی

خواص توابع مختلط از ساختار و دامنه آن‌ها استخراج می‌شود:

- شکل‌های مستطیلی و قطبی: تابع $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ را می‌توان در مختصات مستطیلی یا، برای $z = re^{i\theta}$ ، به صورت $u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ بیان کرد. این نمایش دوگانه در تحلیل تبدیل‌های هندسی کمک می‌کند.
- توابع یک‌مقداری: مثال‌ها شامل چندجمله‌ای‌ها $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ (تعریف شده برای همه z) و توابع گویا $P(z)/Q(z)$ (تعریف شده در جاهایی که $Q(z) \neq 0$).
- توابع چندمقداری: توابعی مانند $z^{1/2}$ خروجی‌های متعددی تولید می‌کنند (مثلاً دو ریشه دوم). شاخه‌ای مانند ریشه دوم اصلی با $\arg z \in (-\pi, \pi]$ یک‌مقداری بودن را تضمین می‌کند.
- توابع با مقدار حقیقی: اگر $v(x, y) = 0$ ، تابع با مقدار حقیقی است، مثلاً $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$.
- دامنه و برد: دامنه S نقاطی را که تابع در آن‌ها تعریف نشده است، مانند $z \neq 0$ برای

۱.۲ توابع متغیر مختلط

$f(z) = 1/z$ ، مستثنی می‌کند.

۳.۱.۲ مثال‌های توضیحی

• مثال ۱: $f(z) = z^2$

$$z = x + iy \implies f(z) = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy).$$

بنابراین، $u(x, y) = x^2 - y^2$ ، $v(x, y) = 2xy$. در شکل قطبی، $z = re^{i\theta}$ ، پس:

$$f(z) = r^2 e^{i2\theta} = r^2 \cos 2\theta + ir^2 \sin 2\theta,$$

با $u(r, \theta) = r^2 \cos 2\theta$ ، $v(r, \theta) = r^2 \sin 2\theta$.

• مثال ۲: $f(z) = 1/z$

$$z = x + iy \neq 0 \implies f(z) = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

بنابراین، $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ ، $v(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$. دامنه: $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

• مثال ۳: $f(z) = |z|^2$

$$|z|^2 = x^2 + y^2 \implies u(x, y) = x^2 + y^2, \quad v(x, y) = 0.$$

این یک تابع با مقدار حقیقی است که برای همه z تعریف شده است.

۱.۲ توابع متغیر مختلط

• مثال ۴: $f(z) = z^{1/2}$: برای $z = re^{i\theta}$ ، شاخه اصلی به صورت:

$$f(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2}, \quad -\pi < \theta \leq \pi, \quad f(0) = 0.$$

این یک تابع یک‌مقداری را با محدود کردن زاویه تعریف می‌کند.

۴.۱.۲ کاربردها و نتایج

توابع متغیر مختلط پایه تحلیل مختلط هستند و امکان مطالعه توابع تحلیلی را فراهم می‌کنند که در معنای مختلط مشتق‌پذیر هستند. این توابع در فیزیک (مانند دینامیک شارها) و مهندسی (مانند پردازش سیگنال) کاربرد دارند. نتیجه‌ای قابل توجه این است که چندجمله‌ای‌ها در همه جا تعریف شده‌اند، در حالی که توابع گویا نیاز به تعیین دقیق دامنه دارند.

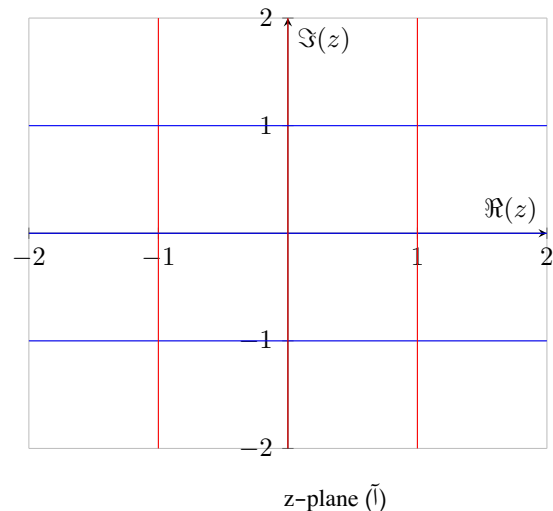
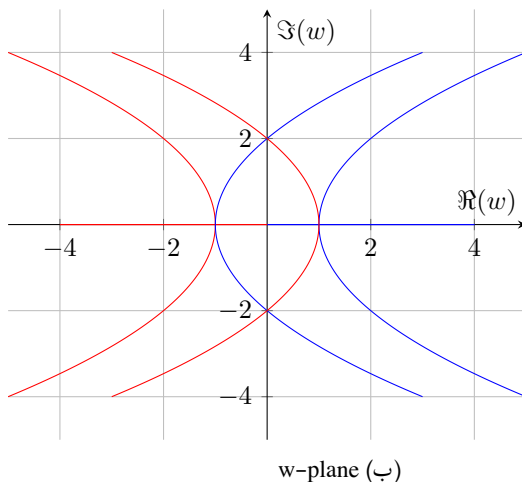
۵.۱.۲ زمینه تاریخی

مطالعه توابع مختلط در قرن هجدهم با اوایلر و گاوس آغاز شد که اعداد مختلط را بررسی کردند. این حوزه در قرن نوزدهم توسط آگوستین-لویی کوشی، که مشتق و انتگرال مختلط را معرفی کرد، رسمی شد و پایه تحلیل مختلط مدرن را گذاشت. کارهای ریمان در مورد سطوح ریمان و نگاشت‌های همدیس این نظریه را غنی‌تر کرد و کاربردهایی در هندسه و فیزیک ایجاد کرد.

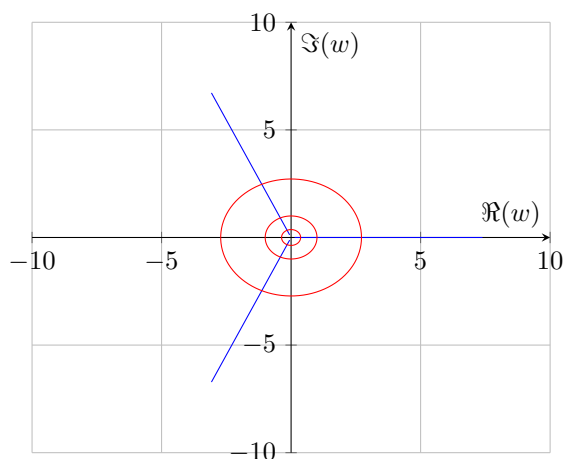
توابع متغیر مختلط را می‌توان به عنوان نگاشت‌هایی در صفحه مختلط تجسم کرد. برای $f(z) = z^2$ ، نقطه $z = re^{i\theta}$ به $r^2 e^{i2\theta}$ نگاشت می‌شود، زاویه را دو برابر کرده و اندازه را به توان دو می‌رساند، دایره‌ها را به دایره‌های بزرگ‌تر با زوایای کشیده تبدیل می‌کند. برای $f(z) = e^z$ ، که $z = x + iy$ ، تابع به:

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y),$$

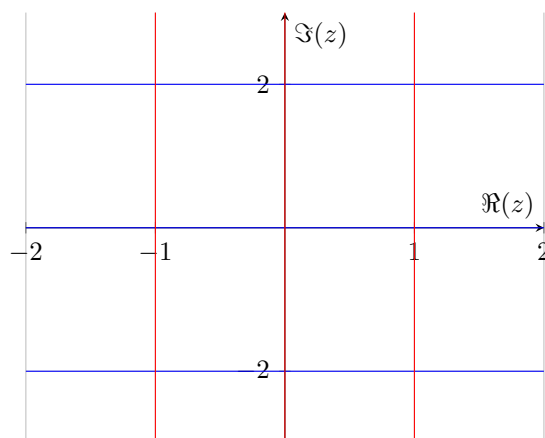
نگاشت می‌شود، خطوط افقی را به دایره‌هایی با شعاع e^x و خطوط عمودی را به پرتوها تبدیل می‌کند. این نگاشت‌ها نشان می‌دهند که چگونه توابع مختلط صفحه مختلط را به صورت هندسی تغییر شکل می‌دهند.



شکل ۱.۲: نگاشت تحت $f(z) = z^2$. خطوط افقی (آبی) در صفحه z به سهمی‌ها در صفحه w نگاشت می‌شوند، و خطوط عمودی (قرمز) به سهمی‌ها نگاشت می‌شوند.

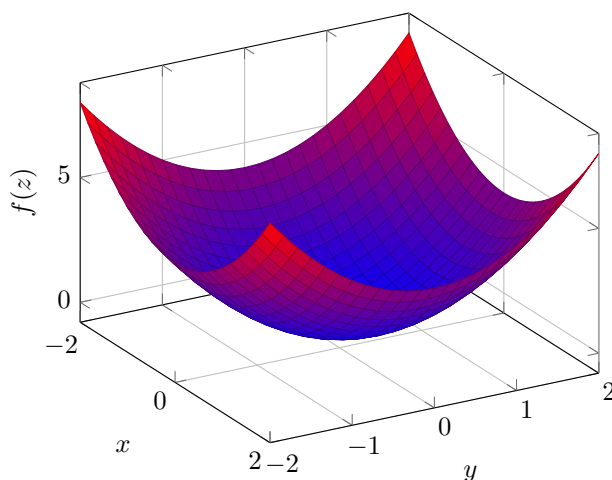


w-plane (ب)



z-plane (آ)

شکل ۲.۲: نگاشت تحت $f(z) = e^z$. خطوط افقی (آبی) در صفحه z به پرتوها در صفحه w نگاشت می‌شوند، و خطوط عمودی (قرمز) به دایره‌ها نگاشت می‌شوند.



شکل ۳.۲: رسم تابع حقیقی $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ ، که به صورت یک سهمی وار نشان داده شده است.

۱.۲ توابع متغیر مختلط

۷.۱.۲ تمرین‌ها

تمرین‌های زیر، الهام گرفته از مسائل استاندارد در تحلیل مختلط، درک را تقویت می‌کنند:

۱. $u(x, y)$ و $v(x, y)$ را برای $f(z) = z^2 + 2z$ بیابید:

$$f(z) = (x + iy)^2 + 2(x + iy) = (x^2 - y^2 + 2x) + i(2xy + 2y).$$

پاسخ: $v(x, y) = 2xy + 2y$, $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$.

۲. دامنه $f(z) = \frac{z}{z-1}$ را تعیین کنید: تابع زمانی که $z - 1 = 0$ ، یعنی $z = 1$ ، تعریف نشده است. پاسخ: دامنه $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ است.

۳. $f(z) = e^z$ را بر حسب x و y بیان کنید:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

پاسخ: $v(x, y) = e^x \sin y$, $u(x, y) = e^x \cos y$.

۸.۱.۲ تمرین‌های دشوارتر

این مسائل درک پیشرفته را به چالش می‌کشند:

۱. شاخه‌ای از $\log z$ را تعریف کرده و دامنه آن را مشخص کنید.

۲. برای $f(z) = z\bar{z}$ ، نشان دهید که در هیچ جا تحلیلی نیست (نکته: معادلات کوشی-ریمان را بررسی کنید).

۲.۲ نگاشت‌ها

۱.۲.۲ تعریف

نگاشت یا تبدیل توسط تابع $w = f(z)$ قاعده‌ای است که به هر نقطه z در دامنه $S \subset \mathbb{C}$ یک نقطه یکتا w در برد $f(S) \subset \mathbb{C}$ اختصاص می‌دهد. این تبدیل به صورت نگاشتی از صفحه z (که $z = x + iy$) به صفحه w (که $w = u + iv$) تجسم می‌شود، که در آن $u(x, y)$ و $v(x, y)$ توابع با مقدار حقیقی هستند. تصویر یک نقطه z_0 برابر است با $w_0 = f(z_0)$ ، تصویر یک مجموعه $T \subset S$ مجموعه نقاط $\{w = f(z) \mid z \in T\}$ است، و تصویر معکوس یک نقطه w_0 مجموعه $\{z \in S \mid f(z) = w_0\}$ است که ممکن است خالی، یک نقطه یا چند نقطه باشد.

۲.۲.۲ خواص اصلی

خواص نگاشت‌ها در تحلیل مختلط چگونگی تبدیل نقاط، منحنی‌ها و نواحی در صفحه مختلط توسط توابع مختلط را توصیف می‌کند. ویژگی‌های کلیدی عبارتند از:

• تصویر و تصویر معکوس:

- تصویر یک نقطه یا مجموعه تحت تابع f ، نقطه یا مجموعه متناظر در صفحه w است.
- تصویر معکوس یک نقطه w_0 به تابع f بستگی دارد و می‌تواند در پیچیدگی متفاوت باشد.

• انواع نگاشت‌ها:

- انتقال: $w = z + b$ (که $b \in \mathbb{C}$) کل صفحه z را به اندازه b جابجا می‌کند. برای مثال،

- $b = 1 + i$ صفحه را یک واحد به راست و یک واحد به بالا منتقل می‌کند.
- چرخش: $w = e^{i\theta} z$ (که $\theta \in \mathbb{R}$) نقاط را حول مبدأ به اندازه زاویه θ می‌چرخاند. برای مثال، $w = iz$ صفحه را ۹۰ درجه خلاف جهت عقربه‌های ساعت می‌چرخاند.
- گسترش: $w = az$ (که $a \in \mathbb{R}$) صفحه را به ضریب $|a|$ مقیاس می‌کند (اگر $a > 1$ گسترش می‌یابد، اگر $0 < a < 1$ منقبض می‌شود).
- انعکاس: $w = \bar{z}$ نقاط را نسبت به محور حقیقی منعکس می‌کند، و $z = x + iy$ را به $w = x - iy$ نگاشت می‌کند.
- نگاشت‌های همدیس: توابع تحلیلی با مشتق‌های غیرصفر زوایا را به صورت محلی حفظ می‌کنند، که برای حفظ خواص هندسی حیاتی است.
- تبدیل‌های هندسی: توابعی مانند $w = z^2$ منحنی‌های خاصی (مانند هذلولی‌ها) را به اشکال دیگر (مانند خطوط) تبدیل می‌کنند.

۳.۲.۲ مثال‌های توضیحی

- مثال ۱: $w = z^2$: برای $z = x + iy$ ، $w = (x^2 - y^2) + i(2xy)$ ، بنابراین $u = x^2 - y^2$ ، $v = 2xy$ در صفحه z :
- منحنی $x^2 - y^2 = c_1$ (هذلولوی) به خط عمودی $u = c_1$ در صفحه w نگاشت می‌شود.
- منحنی $2xy = c_2$ (هذلولوی دیگر) به خط افقی $v = c_2$ نگاشت می‌شود.
- دامنه $x > 0, y > 0, xy < 1$ به نوار $0 < v < 2$ نگاشت می‌شود.
- ناحیه بسته $x \geq 0, y \geq 0, xy \leq 1$ به نوار بسته $0 \leq v \leq 2$ نگاشت می‌شود.

در مختصات قطبی، که $z = re^{i\theta}$ داریم:

$$w = r^2 e^{i2\theta},$$

بنابراین اندازه به توان دو می‌رسد ($\rho = r^2$) و زاویه دو برابر می‌شود ($\phi = 2\theta$). ربع اول $r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi/2$ به نیم‌صفحه بالایی $\rho \geq 0, 0 \leq \phi \leq \pi$ نگاشت می‌شود.

• مثال ۲: انتقال $w = z + 1$: هر نقطه $z = x + iy$ را به $w = (x + 1) + iy$ منتقل می‌کند، که کل صفحه z را یک واحد به راست جابجا می‌کند. دایره واحد $|z| = 1$ به دایره‌ای با مرکز $(1, 0)$ و شعاع ۱ نگاشت می‌شود.

• مثال ۳: چرخش $w = iz$: از آنجا که $i = e^{i\pi/2}$ ، نگاشت $w = iz$ صفحه را ۹۰ درجه خلاف جهت عقربه‌های ساعت می‌چرخاند. برای $z = x + iy$ داریم:

$$w = i(x + iy) = -y + ix,$$

بنابراین نقطه (x, y) به $(-y, x)$ نگاشت می‌شود. خط عمودی $x = c$ به خط افقی $y = c$ نگاشت می‌شود.

• مثال ۴: انعکاس $w = \bar{z}$: برای $z = x + iy$ ، نگاشت به صورت:

$$w = x - iy,$$

نقاط را نسبت به محور حقیقی منعکس می‌کند. نیم‌صفحه بالایی $y > 0$ به نیم‌صفحه پایینی $y < 0$ نگاشت می‌شود.

۴.۲.۲ کاربردها و نتایج

نگاشت‌ها در تحلیل مختلط نقش اساسی دارند، به‌ویژه در حل مسائل مقدار مرزی در فیزیک و مهندسی. نگاشت‌های همدیس دامنه‌های پیچیده (مانند نواحی نامنظم) را به نواحی ساده‌تر (مانند دیسک واحد یا نیم‌صفحه) تبدیل می‌کنند و محاسبات در دینامیک شارها یا الکترواستاتیک را تسهیل می‌کنند. نتیجه‌ای قابل توجه این است که توابع تحلیلی با مشتق‌های غیرصفر همدیس هستند و زوایا را به صورت محلی حفظ می‌کنند.

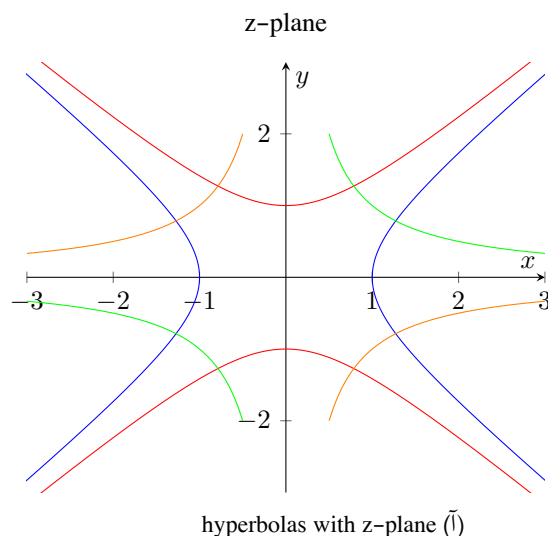
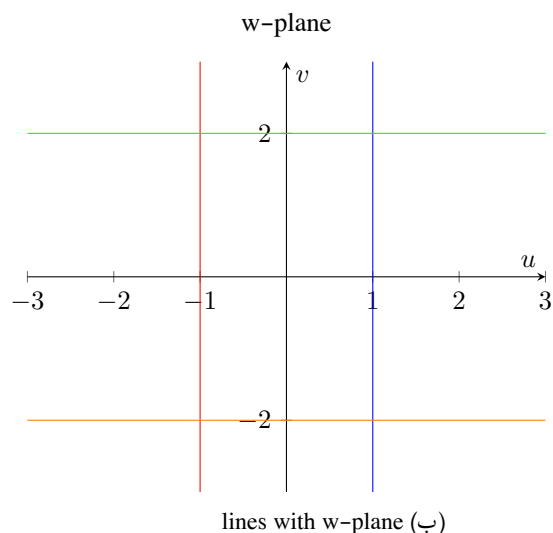
۵.۲.۲ زمینه تاریخی

مطالعه نگاشت‌ها در تحلیل مختلط در قرن نوزدهم توسط برنهارد ریمان، که سطوح ریمان را برای توابع چندمقداری معرفی کرد، و هرمان شوارتز و الوین کریستوفل، که تبدیل شوارتز-کریستوفل را برای نگاشت چندضلعی‌ها به نیم‌صفحه بالایی توسعه دادند، پیشرفت کرد. کارهای اولیه اوایلر و گاوس پایه‌های تفسیر هندسی توابع مختلط را فراهم کرد.

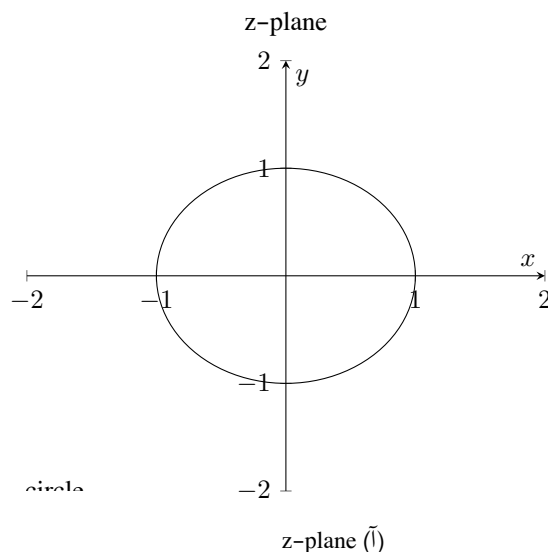
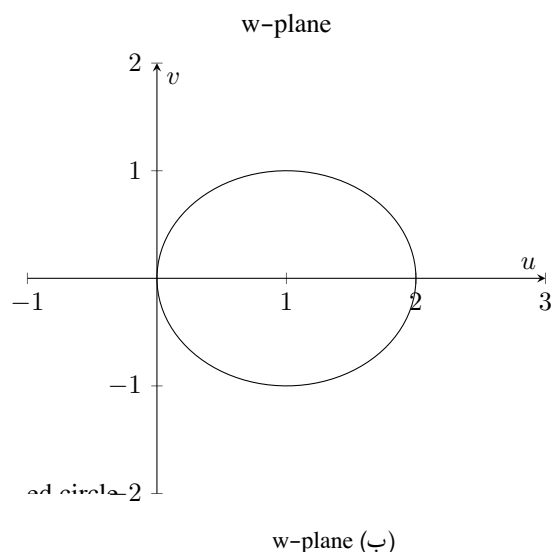
۶.۲.۲ شهود

نگاشت‌ها را می‌توان به صورت تجسمی از صفحه z به عنوان ورقی انعطاف‌پذیر که به صفحه w تبدیل می‌شود، تصور کرد. برای $w = z^2$ ، شبکه‌ای از هذلولی‌ها در صفحه z به خطوط عمودی و افقی در صفحه w تبدیل می‌شود: هذلولی‌های $x^2 - y^2 = c_1$ به خطوط عمودی $u = c_1$ ، و هذلولی‌های $2xy = c_2$ به خطوط افقی $v = c_2$. در شکل قطبی، $w = r^2 e^{i2\theta}$ ، زوایا را دو برابر و فاصله‌ها را به توان دو می‌رساند، خطوط شعاعی را به مارپیچ‌ها تبدیل می‌کند. انتقال

$w = z + b$ کل ورق را به طور یکنواخت جابجا می‌کند، چرخش $w = e^{i\theta}z$ آن را حول مبدأ می‌چرخاند، و انعکاس $w = \bar{z}$ آن را روی محور حقیقی برمی‌گرداند.



شکل ۴.۲: نگاشت تحت $w = z^2$. هذلولی‌های $x^2 - y^2 = c_1$ و $2xy = c_2$ در صفحه z به ترتیب به خطوط عمودی $u = c_1$ و خطوط افقی $v = c_2$ در صفحه w نگاشت می‌شوند.



شکل ۵.۲: انتقال تحت $w = z + 1$. دایره واحد در صفحه z به اندازه یک واحد به سمت راست در صفحه w جابجا می‌شود.

۷.۲.۲ تمرین‌ها

تمرین‌های زیر درک نگاشت‌ها را تقویت می‌کنند:

۱. تصویر خط $y = x$ را تحت نگاشت $w = z^2$ بیابید:

• پاسخ: برای $z = x + ix$ داریم:

$$w = (x + ix)^2 = 2ix^2.$$

بنابراین، $u = 0$ ، $v = 2x^2$ ، که $x \in \mathbb{R}$. تصویر محور موهومی غیرمنفی $u = 0$ ، $v \geq 0$ است.

۲. تصویر خط عمودی $x = 1$ را تحت $w = z^2$ تعیین کنید:

• پاسخ: برای $z = 1 + iy$ داریم:

$$w = (1 + iy)^2 = (1 - y^2) + i(2y).$$

بنابراین، $u = 1 - y^2$ ، $v = 2y$. با تغییر y ، این یک سهمی با معادله $u = 1 - \frac{v^2}{4}$ را توصیف می‌کند که به چپ باز می‌شود.

۳. تصویر دایره واحد $|z| = 1$ را تحت $w = z + 1$ توصیف کنید:

• پاسخ: برای $z = e^{i\theta}$ داریم:

$$w = e^{i\theta} + 1.$$

این دایره واحد با مرکز در مبدأ را به دایره‌ای با مرکز $(1, 0)$ و شعاع ۱ منتقل می‌کند.

۳.۲ نگاشت‌های تابع نمایی

۸.۲.۲ تمرین‌های دشوارتر

این مسائل درک پیشرفته نگاشت‌ها را به چالش می‌کشند:

۱. یک نگاشت هم‌دیس بیابید که نیم‌صفحه بالایی $\Im z > 0$ را به دیسک واحد $|w| < 1$ تبدیل کند.

۲. تصویر نوار $0 < \Im z < 1$ را تحت نگاشت $w = \sin z$ تعیین کنید.

۳.۲ نگاشت‌های تابع نمایی

۱.۳.۲ تعریف

تابع نمایی برای یک متغیر مختلط $z = x + iy$ ، که در آن $x, y \in \mathbb{R}$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$$

در شکل قطبی، این به صورت:

$$e^z = e^x e^{iy}$$

بیان می‌شود، که در آن e^x قدر مطلق ($\rho = |w|$) و y آرگومان ($\phi = \arg w$) عدد مختلط $w = e^z$ است.

۳.۲ نگاشت‌های تابع نمایی

۲.۳.۲ خواص اصلی

تابع نمایی دارای چندین خاصیت اساسی است که برای رفتار نگاشت آن حیاتی هستند:

- دوره‌ای بودن: تابع دوره‌ای است با دوره $2\pi i$ ، به طوری که $e^{z+2\pi i} = e^z$ برای همه $z \in \mathbb{C}$ ، به دلیل $e^{i2\pi} = 1$.
- غیر صفر: از آنجا که $e^x > 0$ برای همه $x \in \mathbb{R}$ ، $e^z \neq 0$ برای همه $z \in \mathbb{C}$.
- تابع سرتاسری: مشتق e^z برابر e^z است، که آن را در همه جای صفحه مختلط تحلیلی می‌کند، خاصیتی که همدیسی (حفظ زاویه) را تضمین می‌کند زیرا $(e^z)' \neq 0$.
- پوشا بودن: تابع صفحه مختلط را به $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ نگاشت می‌کند، و همه اعداد مختلط غیر صفر را پوشش می‌دهد.
- یک به یک و پوشا بودن در نوارها: در هر نوار افقی با عرض 2π ، مانند $a < \Im z \leq a+2\pi$ ، e^z یک به یک و پوشا به $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ است.

۳.۳.۲ نگاشت خطوط

تابع نمایی، خطوط در صفحه z را به منحنی‌های خاصی در صفحه w تبدیل می‌کند:

- خطوط عمودی: برای یک خط عمودی $x = c$ ، که c یک ثابت است، $z = c + iy$ ، بنابراین:

$$w = e^z = e^c e^{iy}$$

در اینجا، $|w| = e^c$ ، یک ثابت، و $\arg w = y$ ، که از $-\infty$ تا ∞ تغییر می‌کند. بنابراین،

۳.۲ نگاشت‌های تابع نمایی

خط به یک دایره با مرکز در مبدأ و شعاع e^c نگاشت می‌شود، که به طور بی‌نهایت بارها پیموده می‌شود با تغییر y .

• خطوط افقی: برای یک خط افقی $y = d$ ، که d یک ثابت است، $z = x + id$ ، بنابراین:

$$w = e^z = e^x e^{id}$$

در اینجا، $\arg w = d$ ، یک ثابت، و $|w| = e^x$ ، که از 0 تا ∞ با رفتن x از $-\infty$ تا ∞ تغییر می‌کند. بنابراین، خط به یک پرتو منشعب از مبدأ در زاویه d ، به استثنای خود مبدأ، نگاشت می‌شود.

۴.۳.۲ نگاشت نواحی

تابع نمایی، نواحی در صفحه z را به نواحی در صفحه w نگاشت می‌کند:

• مستطیل‌ها: یک مستطیل تعریف شده توسط $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ به:

$$\{w = \rho e^{i\phi} \mid e^a \leq \rho \leq e^b, c \leq \phi \leq d\}$$

نگاشت می‌شود. این یک بخش حلقوی در صفحه w است، که توسط دایره‌های با شعاع e^a و e^b و پرتوهای در زوایا c و d محدود شده است. اگر $d - c < 2\pi$ ، نگاشت یک به یک است؛ اگر $d - c = 2\pi$ ، $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ را پوشش می‌دهد.

• نوارهای افقی: یک نوار افقی، مانند $0 \leq y \leq \pi$ ، به نیم‌صفحه بالایی $\Im w \geq 0$ نگاشت می‌شود. برای $w = e^x e^{iy}$ ، $z = x + iy$ ، بنابراین $0 \leq \arg w \leq \pi$ ، و $|w| = e^x$ از 0 تا

۳.۲ نگاشت‌های تابع نمایی

∞ تغییر می‌کند. یک نوار با عرض 2π ، مانند $0 \leq y < 2\pi$ ، به طور یک به یک به $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ نگاشت می‌شود.

۵.۳.۲ مثال‌های توضیحی

مثال‌های زیر نشان می‌دهند که چگونه نگاشت‌ها صفحه مختلط را تبدیل می‌کنند:

• مثال ۱: محور موهومی ($x = 0$): برای $z = iy$ ، $w = e^{iy} = \cos y + i \sin y$ ، که روی دایره واحد $|w| = 1$ قرار دارد. با تغییر y ، کل دایره واحد به طور بی‌نهایت بارها پیموده می‌شود.

• مثال ۲: محور حقیقی ($y = 0$): برای $z = x$ ، $w = e^x$ ، که به محور حقیقی مثبت نگاشت می‌شود، زیرا $e^x > 0$ برای همه x .

• مثال ۳: نوار $0 < y < \pi$: این به نیم‌صفحه بالایی $\Im w > 0$ نگاشت می‌شود. برای $w = e^x e^{iy}$ ، $z = x + iy$ ، با $0 < \arg w < \pi$ ، که نیم‌صفحه بالایی باز را با تغییر x پوشش می‌دهد.

• مثال ۴: مستطیل $0 \leq x \leq 1$ ، $0 \leq y \leq \pi$: این به $1 \leq |w| \leq e$ ، $0 \leq \arg w \leq \pi$ نگاشت می‌شود. یک بخش حلقوی در نیم‌صفحه بالایی بین دایره واحد و دایره با شعاع e نگاشت می‌شود.

۶.۳.۲ کاربردها و نتایج

نگاشت‌های تابع نمایی در تحلیل مختلط بنیادی هستند، به ویژه برای حل مسائل مقدار مرزی در فیزیک و مهندسی. یک کاربرد کلیدی در نظریه پتانسیل است، که در آن نگاشت‌های همدیس

۳.۲ نگاشت‌های تابع نمایی

دامنه‌های مختلط (مثلاً نواحی نامنظم) را به دامنه‌های ساده‌تر (مثلاً دیسک واحد یا نیم‌صفحه) تبدیل می‌کنند، و حل معادله لاپلاس را تسهیل می‌کنند. برای مثال، نگاشت یک ناحیه چندضلعی به نیم‌صفحه بالایی، محاسبات در دینامیک شارها یا الکترواستاتیک را ساده می‌کند. یک نتیجه قابل توجه این است که توابع تحلیلی با مشتق‌های غیرصفر، هم‌دیس هستند و زوایا را به صورت محلی حفظ می‌کنند، که برای این کاربردها ضروری است.

۷.۳.۲ زمینه تاریخی

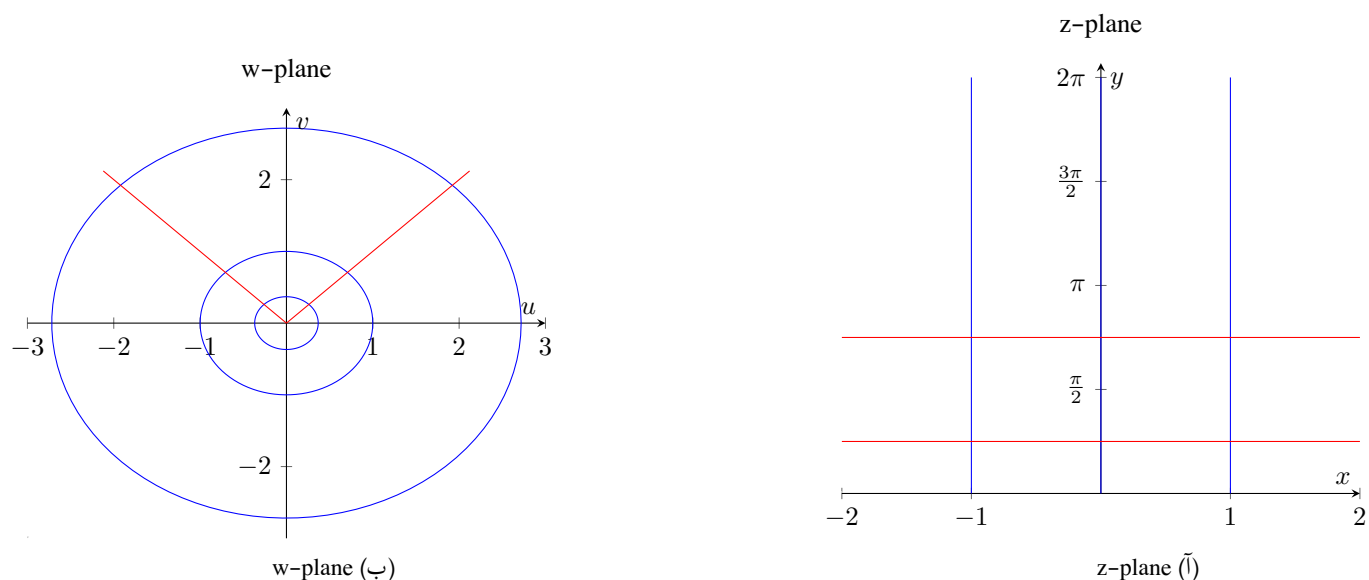
مطالعه نگاشت‌ها در تحلیل مختلط در قرن نوزدهم توسط برنهارد ریمان به طور قابل توجهی پیشرفت کرد، که سطوح ریمان را برای مدیریت توابع چندمقداری و نگاشت‌های آن‌ها معرفی کرد. هرمان شوارتز و الوین کریستوفل، تبدیل شوارتز-کریستوفل را توسعه دادند، که چندضلعی‌ها را به نیم‌صفحه بالایی نگاشت می‌کند، و این سنگ بنای نظریه نگاشت هم‌دیس است. این پیشرفت‌ها بر پایه کارهای قبلی اوایلر و گاوس بنا شد، و تفسیر هندسی توابع مختلط را رسمی کردند.

۸.۳.۲ شهود

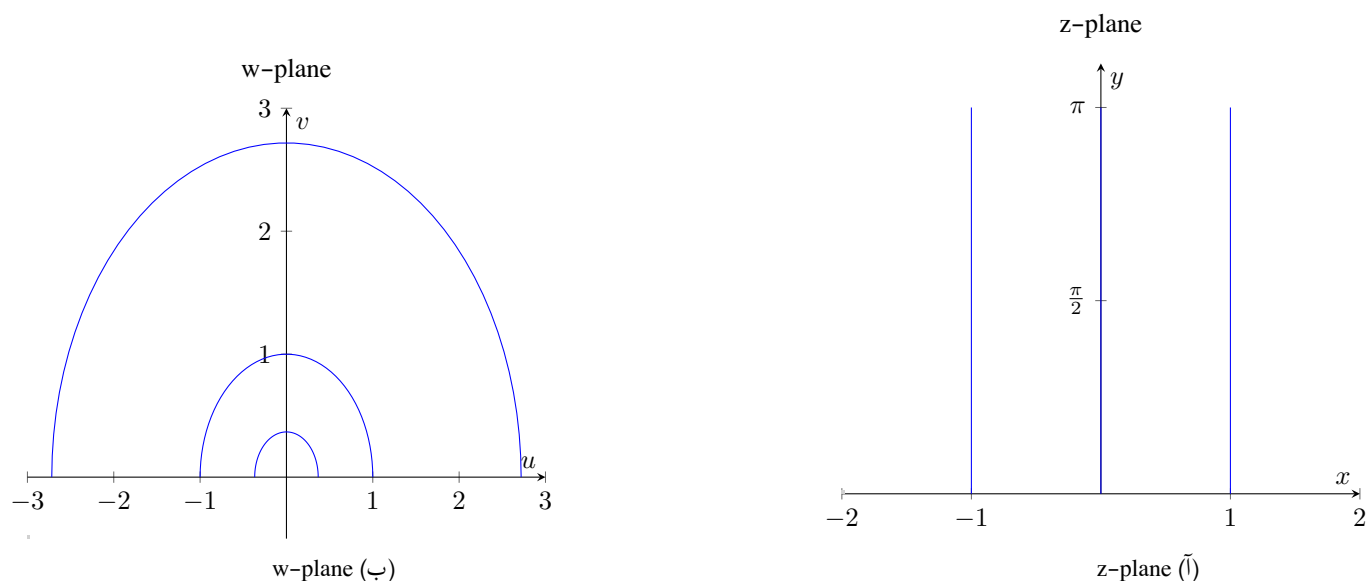
تجسم نگاشت‌ها شامل تصور صفحه z به عنوان یک ورق انعطاف‌پذیر است که به صفحه w تبدیل می‌شود. برای $w = e^z$ ، یک شبکه از خطوط عمودی و افقی در صفحه z را در نظر بگیرید: نگاشت، خطوط عمودی را به دایره‌ها و خطوط افقی را به پرتوها تبدیل می‌کند. یک مستطیل $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ به یک بخش حلقوی نگاشت می‌شود، که توسط دایره‌های با شعاع e^a و e^b و پرتوهای در زوایا c و d محدود شده است. یک نوار مانند $0 \leq y \leq \pi$ نیم‌صفحه بالایی را پوشش می‌دهد، که توانایی تابع در تبدیل نواحی خطی به نواحی منحنی را نشان می‌دهد، و ماهیت

۳.۲ نگاشت‌های تابع نمایی

دوره‌ای آن را منعکس می‌کند.



شکل ۶.۲: نگاشت تحت $w = e^z$. خطوط عمودی آبی در صفحه z در $x = -1, 0, 1$ به ترتیب به دایره‌های آبی در صفحه w با شعاع‌های $e^{-1}, 1, e$ نگاشت می‌شوند. خطوط افقی قرمز در $y = \pi/4, 3\pi/4$ به پرتوهای قرمز با زوایای $\pi/4, 3\pi/4$ نگاشت می‌شوند. مستطیل سایه‌دار به بخش حلقوی سایه‌دار نگاشت می‌شود.



شکل ۷.۲: نگاشت نوار افقی $0 < y < \pi$ تحت $w = e^z$. نوار سایه‌دار در صفحه z به نیم‌صفحه بالایی سایه‌دار $\Im w > 0$ در صفحه w نگاشت می‌شود. خطوط عمودی آبی به نیم‌دایره‌های آبی در نیم‌صفحه بالایی نگاشت می‌شوند.

۳.۲ نگاشت‌های تابع نمایی

۹.۳.۲ تمرین‌ها

تمرین‌های زیر درک نگاشت‌های تابع نمایی را تقویت می‌کنند:

۱. تصویر خط $x = 2$ را تحت $w = e^z$ بیابید.

• پاسخ: برای $z = 2 + iy$ ، $w = e^2 e^{iy}$ ، بنابراین $|w| = e^2$. تصویر، دایره‌ای با مرکز در مبدأ و شعاع e^2 است.

۲. تصویر خط $y = \frac{\pi}{2}$ را تحت $w = e^z$ بیابید.

• پاسخ: برای $z = x + i\frac{\pi}{2}$ ، $w = e^x e^{i\frac{\pi}{2}} = e^x i$ ، با تغییر x ، $w = ie^x$ ، که به محور موهومی مثبت نگاشت می‌شود (زیرا $e^x > 0$).

۳. تصویر نوار $0 < y < 2\pi$ را تحت $w = e^z$ توصیف کنید.

• پاسخ: برای $z = x + iy$ ، $w = e^x e^{iy}$ ، با $0 < y < 2\pi$ ، بنابراین $0 < \arg w < 2\pi$. با تغییر x ، $|w| = e^x$ از 0 تا ∞ تغییر می‌کند، و $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ را پوشش می‌دهد.

۱۰.۳.۲ تمرین‌های دشوارتر

این مسائل درک پیشرفته را به چالش می‌کشند:

۱. تصویر ناحیه $|z| < 1$ را تحت $w = e^z$ تعیین کنید.

۲. یک نگاشت هم‌دیس بیابید که نوار $0 < \Im z < 1$ را به دیسک واحد $|w| < 1$ تبدیل کند، احتمالاً با استفاده از تابع نمایی.

تابع f ، که در یک همسایگی منهای نقطه z_0 تعریف شده است، دارای حد $w_0 \in \mathbb{C}$ است هنگامی که z به z_0 میل می‌کند، که با $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ نشان داده می‌شود، اگر برای هر $\varepsilon > 0$ ، یک $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که:

$$0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - w_0| < \varepsilon$$

اگر z_0 یک نقطه مرزی دامنه باشد، حد به طور مشابه تعریف می‌شود، با در نظر گرفتن فقط نقاط z در دامنه که f در آن‌ها تعریف شده است.

۲.۴.۲ خواص اصلی

خواص حدود در تحلیل مختلط، بنیادی هستند و با تحلیل حقیقی همخوانی دارند، با تطبیق به صفحه مختلط:

۱. یگانگی: اگر $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ و $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_1$ ، آنگاه $w_0 = w_1$.

۲. حد بخش‌های حقیقی و موهومی: برای تابع $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ، که در آن $z = x + iy$ و $z_0 = x_0 + iy_0$ ، حد $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 = u_0 + iv_0$ وجود دارد اگر و تنها اگر:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0 \quad \text{و} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0$$

۳. خواص جبری: فرض کنید $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ و $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = W_0$. آنگاه:

• قانون جمع: $\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) + g(z)) = w_0 + W_0$

• قانون ضرب: $\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z)g(z)) = w_0 W_0$

• قانون تقسیم: $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{w_0}{W_0}$ به شرطی که $W_0 \neq 0$

۴. حد توابع خاص:

• تابع ثابت: برای هر $c \in \mathbb{C}$, $\lim_{z \rightarrow z_0} c = c$

• تابع همانی: $\lim_{z \rightarrow z_0} z = z_0$

• تابع توان: برای $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{z \rightarrow z_0} z^n = z_0^n$

• چندجمله‌ای: برای چندجمله‌ای $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$, $\lim_{z \rightarrow z_0} P(z) = P(z_0)$

• تابع گویا: برای تابع گویا $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, $\lim_{z \rightarrow z_0} R(z) = R(z_0)$ به شرطی که $Q(z_0) \neq 0$

۳.۴.۲ مثال‌های توضیحی

۱. مثال ۱: برای تابع $f(z) = \frac{iz}{2}$, تعریف شده در $\mathbb{C}$, نشان دهید که $\lim_{z \rightarrow 1} f(z) = \frac{i}{2}$. برای هر $\varepsilon > 0$, $\delta = 2\varepsilon$ را انتخاب کنید. اگر $0 < |z - 1| < \delta$, آنگاه:

$$\left| f(z) - \frac{i}{2} \right| = \left| \frac{iz}{2} - \frac{i}{2} \right| = \left| \frac{i}{2}(z - 1) \right| = \frac{1}{2}|z - 1| < \frac{1}{2}\delta = \varepsilon$$

بنابراین، $\lim_{z \rightarrow 1} f(z) = \frac{i}{2}$.

۲. مثال ۲: برای تابع $f(z) = \frac{z}{z}$ ، تعریف شده در $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ، نشان دهید که $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ وجود ندارد. دو مسیر مختلف به $z = 0$ را در نظر بگیرید:

- در امتداد محور حقیقی ($z = x > 0$): $f(x) = \frac{x}{x} = 1$ ، بنابراین با $x \rightarrow 0^+$ ، $f(z) \rightarrow 1$.

- در امتداد محور موهومی ($z = iy, y > 0$): $f(iy) = \frac{iy}{-iy} = -1$ ، بنابراین با $y \rightarrow 0^+$ ، $f(z) \rightarrow -1$.

از آنجا که حدود در مسیرهای مختلف متفاوت است ($1 \neq -1$)، حد $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ وجود ندارد.

۳. مثال ۳: حد $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2+1}{z-i}$ را محاسبه کنید. برای $z \neq i$ ، عدل صورت: $z^2 + 1 = (z-i)(z+i)$ ، بنابراین:

$$\frac{z^2+1}{z-i} = \frac{(z-i)(z+i)}{z-i} = z+i$$

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2+1}{z-i} = \lim_{z \rightarrow i} (z+i) = i+i = 2i$$

پس،

۴.۴.۲ کاربردها و نتایج

حدود، سنگ بنای تحلیل مختلط هستند و پایه‌ای برای تعریف پیوستگی و مشتق‌پذیری فراهم می‌کنند. یک تابع f در نقطه z_0 پیوسته است اگر $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$. مشتق‌پذیری در z_0

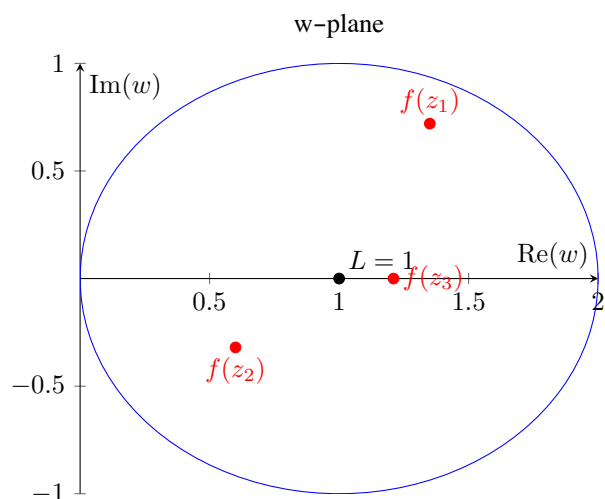
مستلزم وجود حد:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

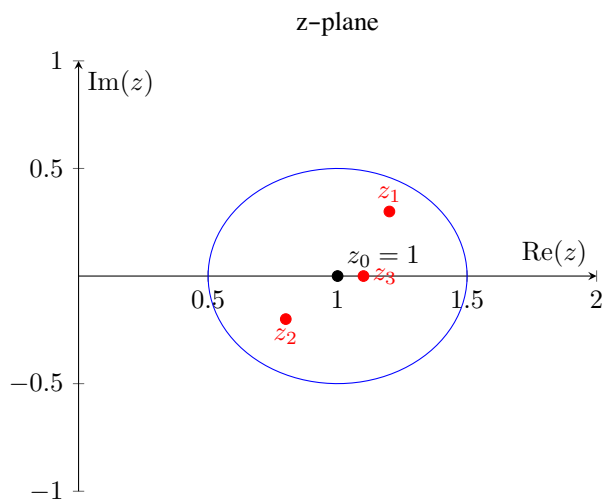
است. این مفاهیم برای ارزیابی انتگرال‌ها و سری‌های مختلط حیاتی هستند، با کاربردهایی در فیزیک (مانند دینامیک شاره‌ها) و مهندسی (مانند پردازش سیگنال). یک نتیجه کلیدی این است که چندجمله‌ای‌ها و توابع گویا (با مخرج غیرصفر در نقطه مورد نظر) ارزیابی‌های حدی ساده‌ای دارند، که تحلیل سیستم‌های پیچیده را تسهیل می‌کند.

۵.۴.۲ شهود

صفحه مختلط به عنوان یک بوم دوبعدی تصور می‌شود که هر نقطه $z = x + iy$ به $f(z)$ نگاشت می‌شود. حد $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ به این معنی است که با نزدیک شدن z به z_0 از هر جهتی — خواه در امتداد خط مستقیم، منحنی یا مارپیچ — همه مقادیر $f(z)$ در یک دیسک کوچک حول w_0 جمع می‌شوند. برای مثال، برای تابع $f(z) = z^2$ ، با نزدیک شدن z به ۱، $f(z)$ به ۱ نزدیک می‌شود، و نقاط نزدیک به $z = 1$ به نقاط نزدیک به $w = 1$ نگاشت می‌شوند. در مقابل، برای تابع $f(z) = \frac{z}{z}$ ، نزدیک شدن به $z = 0$ در امتداد محور حقیقی $w = 1$ را می‌دهد، در حالی که در امتداد محور موهومی $w = -1$ را می‌دهد، که نشان‌دهنده عدم وجود حد به دلیل وابستگی به مسیر است.

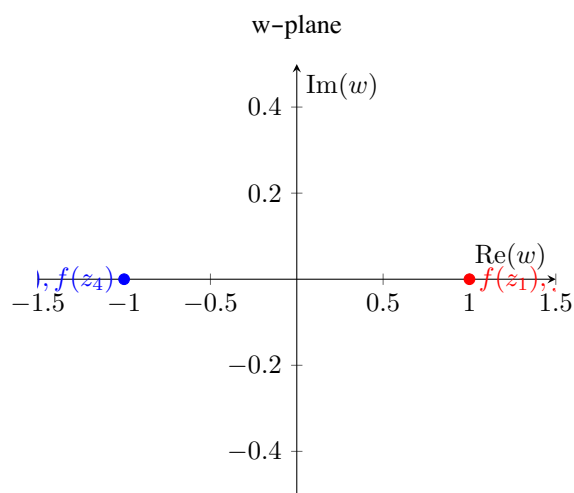


w-plane (ب)

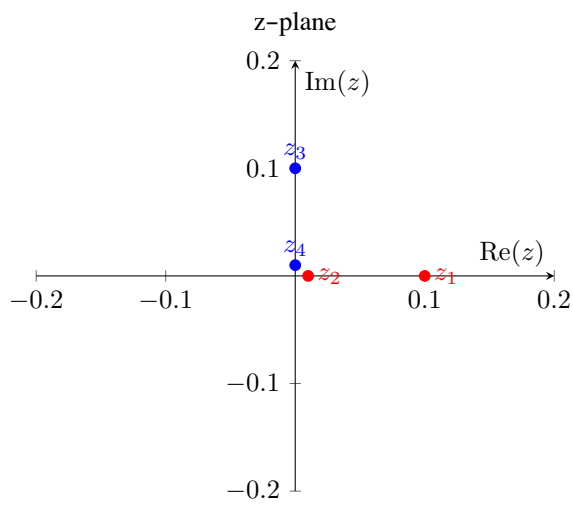


z-plane (ا)

شکل ۸.۲: نمایش تعریف اپسیلون-دلتا برای $f(z) = z^2$ هنگامی که $z \rightarrow 1$. نقاط z_1, z_2, z_3 در فاصله $\delta = 0.5$ از $z_0 = 1$ به نقاط $f(z_1), f(z_2), f(z_3)$ در فاصله $\epsilon = 1$ از $L = 1$ نگاشت می‌شوند.



w-plane (ب)



z-plane (ا)

شکل ۹.۲: نمایش وابستگی به مسیر برای $f(z) = \frac{z}{z}$ هنگامی که $z \rightarrow 0$. نقاط در امتداد محور حقیقی (z_1, z_2) به $w = 1$ نزدیک می‌شوند، در حالی که نقاط در امتداد محور موهومی (z_3, z_4) به $w = -1$ نزدیک می‌شوند، که نشان می‌دهد حد وجود ندارد.

۵.۲ قضیه‌های حدود

۶.۴.۲ تمرین‌ها

۱. حد $\lim_{z \rightarrow 2} (3z + 1)$ را محاسبه کنید. از آنجا که $3z + 1$ یک چندجمله‌ای است، حد برابر است با:

$$\lim_{z \rightarrow 2} (3z + 1) = 3(2) + 1 = 7$$

۲. تعیین کنید که آیا $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$ وجود دارد یا خیر. برای $z = x + iy$ ، $\frac{\bar{z}}{z} = \frac{x-iy}{x+iy}$. در امتداد محور حقیقی ($y = 0$)، $\frac{x}{x} = 1$. در امتداد محور موهومی ($x = 0$)، $\frac{-iy}{iy} = -1$. از آنجا که حدود متفاوت است، حد وجود ندارد.

۳. حد $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2 - 1}{z - 1}$ را محاسبه کنید. صورت را تجزیه کنید: $z^2 - 1 = (z - 1)(z + 1)$. بنابراین:

$$\frac{z^2 - 1}{z - 1} = z + 1 \quad \text{برای } z \neq 1$$

$$\text{پس، } \lim_{z \rightarrow 1} (z + 1) = 1 + 1 = 2$$

۷.۴.۲ تمرین‌های دشوارتر

۱. ثابت کنید که اگر $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ ، آنگاه $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = |w_0|$.

۲. نشان دهید که اگر $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ وجود دارد، آنگاه $f(z)$ در یک همسایگی منهای z_0 کران‌دار است.

۵.۲ قضیه‌های حدود

۵.۲ قضیه‌های حدود

۱.۵.۲ تعریف حد

تابع f ، که در یک همسایگی منهای نقطه z_0 تعریف شده است، دارای حد $w_0 \in \mathbb{C}$ است هنگامی که z به z_0 میل می‌کند، که با $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ نشان داده می‌شود، اگر برای هر $\varepsilon > 0$ ، یک $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که:

$$0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - w_0| < \varepsilon$$

این تعریف تضمین می‌کند که مقادیر تابع به طور یکنواخت به w_0 نزدیک می‌شوند، صرف‌نظر از مسیری که در صفحه مختلط پیموده می‌شود.

۲.۵.۲ قضیه ۱: ارتباط با حدود حقیقی

برای تابع $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ، که در آن $z = x + iy$ و $z_0 = x_0 + iy_0$ ، حد $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ وجود دارد اگر و تنها اگر:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0 \quad \text{و} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0$$

برهان:

- جهت رو به جلو: فرض کنید $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$. برای هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ هرگاه $0 < |z - z_0| < \delta$. از آنجا که $|u - u_0| \leq |f(z) - w_0|$ و $|v - v_0| \leq |f(z) - w_0|$ ، بخش‌های حقیقی و موهومی شرایط حد خود را برآورده می‌کنند.
- جهت معکوس: اگر $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0$ و $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0$

آنگاه برای هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta_1, \delta_2 > 0$ وجود دارند به طوری که $|u - u_0| < \varepsilon/2$ هرگاه $0 < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ با گرفتن v به طور مشابه برای $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta_1$ داریم:

$$|f(z) - w_0| = \sqrt{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2} \leq |u - u_0| + |v - v_0| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

۳.۵.۲ قضیه ۲: خواص جبری حدود

اگر $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$ و $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = M$ ، آنگاه:

$$1. \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) + g(z)] = L + M$$

$$2. \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) - g(z)] = L - M$$

$$3. \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)g(z) = LM$$

$$4. \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{L}{M} \text{ به شرطی که } M \neq 0$$

طرح برهان برای قانون جمع: برای $\varepsilon > 0$ ، $\delta_1, \delta_2 > 0$ وجود دارند به طوری که:

$$\bullet \quad 0 < |z - z_0| < \delta_1 \text{ هرگاه } |f(z) - L| < \varepsilon/2$$

$$\bullet \quad 0 < |z - z_0| < \delta_2 \text{ هرگاه } |g(z) - M| < \varepsilon/2$$

با گرفتن $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ ، برای $0 < |z - z_0| < \delta$:

$$|(f(z) + g(z)) - (L + M)| \leq |f(z) - L| + |g(z) - M| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

۵.۲ قضیه‌های حدود

برهان‌های کسر، ضرب و تقسیم به طور مشابه با استفاده از نابرابری‌های مثلثی و کران‌ها روی $|g(z)|$ برای قانون تقسیم دنبال می‌شوند.

۴.۵.۲ قضیه ۳: یگانگی حدود

اگر $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = M$ و $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$ ، آنگاه $L = M$. برهان: فرض کنید $L \neq M$. بگذارید $\varepsilon = |L - M|/2 > 0$. $\delta_1, \delta_2 > 0$ وجود دارند به طوری که $|f(z) - L| < \varepsilon$ برای $0 < |z - z_0| < \delta_1$ و $|f(z) - M| < \varepsilon$ برای $0 < |z - z_0| < \delta_2$. برای z با $0 < |z - z_0| < \min(\delta_1, \delta_2)$:

$$|L - M| = |(L - f(z)) + (f(z) - M)| \leq |L - f(z)| + |f(z) - M|$$

$$< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |L - M|$$

این نشان می‌دهد که $|L - M| < |L - M|$ ، که تناقض است مگر اینکه $L = M$.

۵.۵.۲ حدود شامل بی‌نهایت

در تحلیل مختلط، حدود شامل بی‌نهایت در صفحه مختلط گسترده $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ تعریف می‌شوند.

۱. حد در $z \rightarrow \infty$: $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = L$ اگر برای هر $\varepsilon > 0$ ، $R > 0$ وجود داشته باشد به طوری که:

$$|z| > R \implies |f(z) - L| < \varepsilon$$

۲. حد برابر بی‌نهایت: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ اگر برای هر $M > 0$ ، $\delta > 0$ وجود داشته باشد

۵.۲ قضیه‌های حدود

به طوری که:

$$0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z)| > M$$

مثال: برای $f(z) = \frac{1}{z}$ ، $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \infty$ زیرا $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|} \rightarrow \infty$ و $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ زیرا $|\frac{1}{z}| \rightarrow 0$.

۶.۵.۲ مثال‌های توضیحی

۱. نشان دهید که $\lim_{z \rightarrow 1} (2z + 3) = 5$ برای $\varepsilon > 0$ ، $\delta = \varepsilon/2$ را انتخاب کنید. آنگاه، اگر $0 < |z - 1| < \delta$

$$|(2z + 3) - 5| = |2z - 2| = 2|z - 1| < 2\delta = \varepsilon$$

۲. تعیین کنید که آیا $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$ وجود دارد. در امتداد محور حقیقی $(x \rightarrow 0^+, z = x)$: $\frac{\bar{x}}{x} = 1$. در امتداد محور موهومی $(y \rightarrow 0^+, z = iy)$: $\frac{\overline{iy}}{iy} = -1$. از آنجا که حدود متفاوت است، حد وجود ندارد.

۳. حد $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 + 1}{z - i}$ را محاسبه کنید. برای $z \neq i$ ، $\frac{z^2 + 1}{z - i} = z + i$. بنابراین، $\lim_{z \rightarrow i} (z + i) = 2i$.

۷.۵.۲ کاربردها و نتایج

قضیه‌های حدود، پایه پیوستگی و مشتق‌پذیری در تحلیل مختلط هستند. تابع f در z_0 پیوسته است اگر $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$. مشتق در z_0 به صورت $f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$ تعریف می‌شود.

۵.۲ قضیه‌های حدود

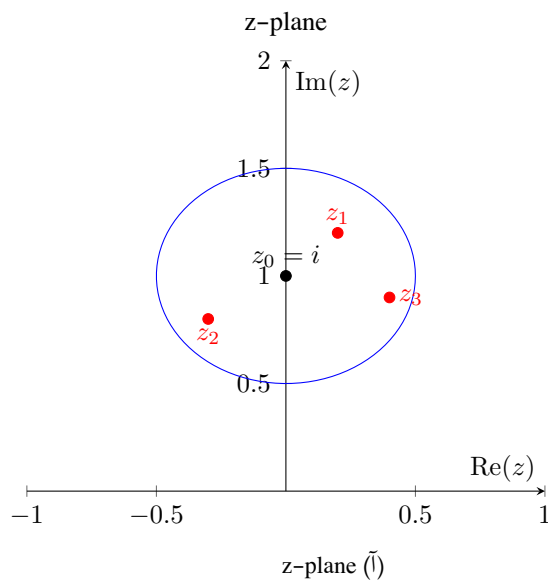
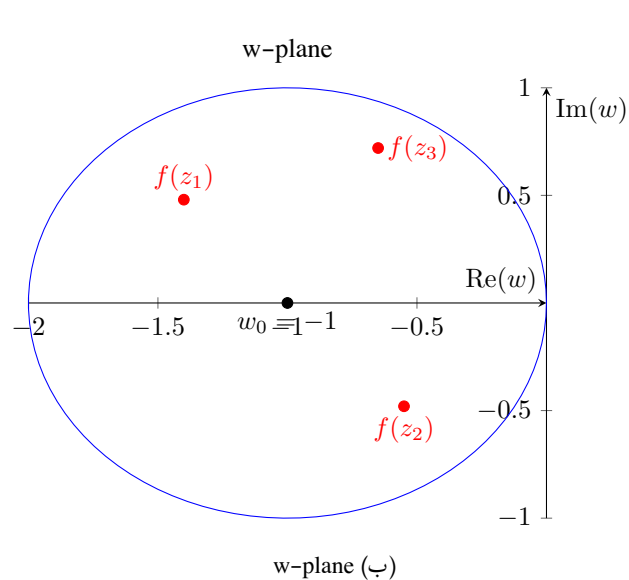
می‌شود. این مفاهیم برای مطالعه توابع تحلیلی، انتگرال‌گیری روی مسیر و کاربردها در فیزیک (مانند دینامیک شاره‌ها) و مهندسی (مانند پردازش سیگنال) حیاتی هستند. نتیجه‌ای کلیدی این است که چندجمله‌ای‌ها و توابع گویا (با مخرج غیرصفر) ارزیابی‌های حدی ساده‌ای دارند.

۸.۵.۲ زمینه تاریخی

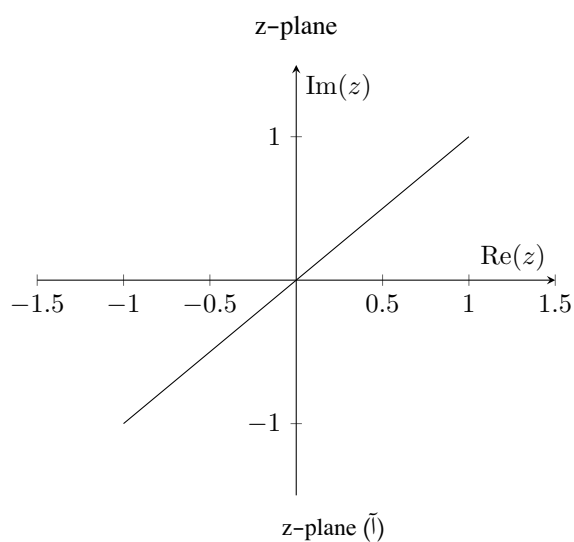
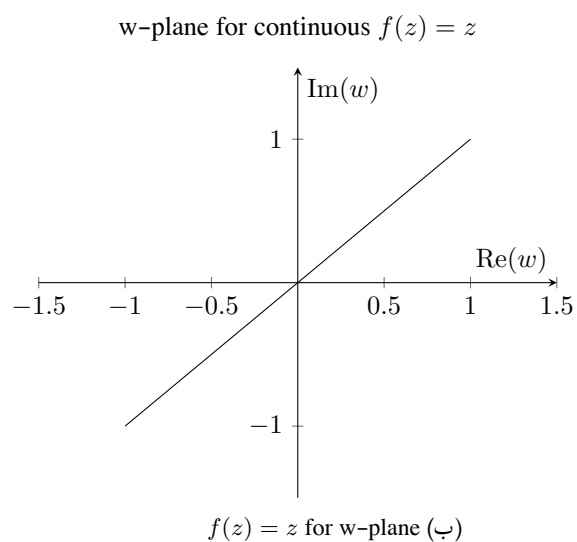
تعریف دقیق حدود در قرن نوزدهم توسط آگوستین-لویی کوشی و کارل وایرشتراس شکل گرفت. کوشی در سال ۱۸۲۱ در کتاب تحلیل مفهوم مدرن حد را معرفی کرد، که وایرشتراس با فرمول‌بندی اپسیلون-دلتا آن را اصلاح کرد. در تحلیل مختلط، این ایده‌ها به توابع متغیر مختلط گسترش یافتند و پایه نظریه توابع تحلیلی و انتگرال‌گیری مختلط را تشکیل دادند.

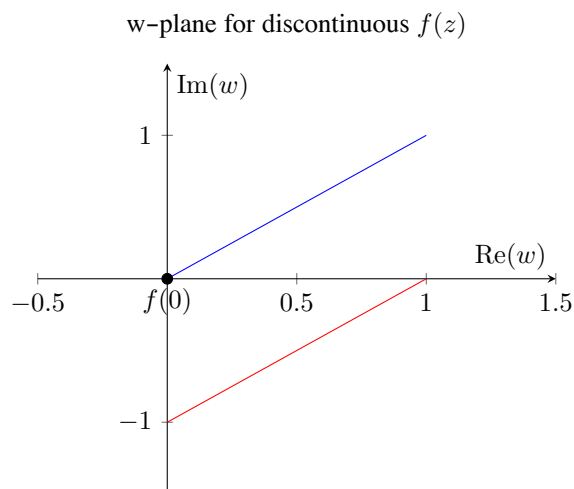
۹.۵.۲ شهود

در صفحه مختلط، حد $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ به این معنی است که برای هر دیسک کوچک حول w_0 ، دیسکی حول z_0 (به جز خود z_0) وجود دارد به طوری که همه نقاط در این دیسک به داخل دیسک حول w_0 نگاشت می‌شوند. این برای هر مسیری به z_0 ، چه خط مستقیم یا منحنی، صدق می‌کند. برای حدود در بی‌نهایت، با دور شدن z از مبدأ، $f(z)$ به L نزدیک می‌شود، که به صورت تثبیت در نزدیکی L در مرز صفحه مختلط تجسم می‌شود.

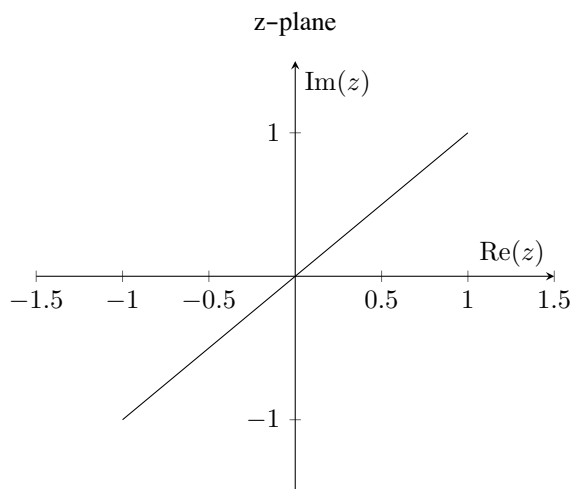


شکل ۱۰.۲: نمایش تعریف اپسیلون-دلتا برای حد $f(z) = z^2$ هنگامی که $z \rightarrow i$. نقاط z_1, z_2, z_3 در فاصله $\delta = 0.5$ از $z_0 = i$ به نقاطی در فاصله $\epsilon = 1$ از $w_0 = -1$ نگاشت می‌شوند.





$f(z)$ discontinuous for w-plane (ب)



z-plane ($\bar{I}$)

شکل ۱۲.۲: مقایسه توابع پیوسته و ناپیوسته. چپ: برای $f(z) = z$ ، تصویر مسیر پیوسته است. راست: برای $f(z) = z + 1$ و اگر $\Im(z) < 0$ ، تصویر در $z = 0$ یک پرش دارد.

۱۰.۵.۲ تمرین‌ها

۱. حد $\lim_{z \rightarrow 3} (z^2 - 4z + 5)$ را محاسبه کنید.

• پاسخ: $(3)^2 - 4(3) + 5 = 9 - 12 + 5 = 2$.

۲. تعیین کنید که آیا $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|}{z}$ وجود دارد.

• پاسخ: در امتداد محور حقیقی ($z = x > 0$): $\frac{|x|}{x} = 1$. در امتداد محور حقیقی منفی

($z = x < 0$): $\frac{|x|}{x} = -1$. حد وجود ندارد.

۳. حد $\lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z-2i}{z^2+4}$ را محاسبه کنید.

• پاسخ: برای $z \neq 2i$ ، $\frac{z-2i}{z^2+4} = \frac{1}{z+2i}$. بنابراین، $\lim_{z \rightarrow 2i} \frac{1}{z+2i} = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}$.

۴. حد $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{3z+2}{z+1}$ را محاسبه کنید.

۶.۲ حدود شامل نقطه در بی‌نهایت

• پاسخ: تقسیم بر z : $3 \rightarrow \frac{3+\frac{2}{z}}{1+\frac{1}{z}}$

۵. حد $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z^2}$ را تعیین کنید.

• پاسخ: $\frac{1}{z^2} \rightarrow \infty$ ، بنابراین $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z^2} = \infty$

۱۱.۵.۲ تمرین‌های دشوارتر

۱. ثابت کنید که اگر $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$ ، آنگاه $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = |L|$

۲. نشان دهید که اگر $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ وجود دارد، آنگاه $f(z)$ در یک همسایگی منهای z_0 کران‌دار است.

۳. برای یک چندجمله‌ای $f(z)$ با درجه n ، نشان دهید که $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$

۶.۲ حدود شامل نقطه در بی‌نهایت

۱.۶.۲ تعریف

در تحلیل مختلط، صفحه مختلط گسترده‌شده، یا کره ریمان، نقطه در بی‌نهایت را، که با ∞ نشان داده می‌شود، شامل می‌شود، که به عنوان قطب شمال یک کره واحد تصور می‌شود، جایی که صفحه مختلط به صورت استرئوگرافیک (تصویری سه بعدی) پروژه می‌شود. یک همسایگی از ∞ شامل تمام نقاط z است که $|z| > R$ برای یک $R > 0$ بزرگ.

• حد هنگام $z \rightarrow \infty$: تابع f حد $L \in \mathbb{C}$ را هنگام $z \rightarrow \infty$ دارد، که با $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = L$

۶.۲ حدود شامل نقطه در بی‌نهایت

نشان داده می‌شود، اگر برای هر $\epsilon > 0$ ، $M > 0$ وجود داشته باشد به طوری که:

$$|z| > M \implies |f(z) - L| < \epsilon$$

• **حد برابر با ∞ :** $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ برقرار است اگر برای هر $K > 0$ ، $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که:

$$0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z)| > K$$

• **حد هنگام $z \rightarrow \infty$ برابر با ∞ :** $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ برقرار است اگر برای هر $M > 0$ ، $K > 0$ وجود داشته باشد به طوری که:

$$|z| > M \implies |f(z)| > K$$

۲.۶.۲ خواص اصلی

خواص حدود شامل نقطه در بی‌نهایت از تعاریف آنها و هندسه صفحه مختلط گسترده‌شده ناشی می‌شوند:

۱. معادل‌ها با توابع معکوس:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \iff \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$$

$$w = \frac{1}{z} \text{ در آن } \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = L \iff \lim_{w \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{w}\right) = L$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty \iff \lim_{w \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{w}\right) = \infty$$

۶.۲ حدود شامل نقطه در بی نهایت

این معادله‌ها از تبدیل $w = \frac{1}{z}$ ، که $z = 0$ را به ∞ و برعکس نگاشت می‌کند، استفاده می‌کنند، که ادامه‌پذیری در صفحه مختلط گسترده شده را تضمین می‌کند.

۲. حدود توابع گویا: برای یک تابع گویا $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ ، که در آن $P(z)$ و $Q(z)$ چندجمله‌ای‌هایی با درجات m و n هستند، به ترتیب:

• اگر $m < n$ ، آنگاه $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$.

• اگر $m = n$ ، آنگاه $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \frac{a_m}{b_n}$ ، که در آن a_m و b_n ضرایب اولیه $P(z)$ و $Q(z)$ هستند.

• اگر $m > n$ ، آنگاه $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$.

۳. خواص جبری: اگر $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = L$ و $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = M$ ، آنگاه:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (f(z) + g(z)) = L + M$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (f(z)g(z)) = LM$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{L}{M} \quad \text{به شرطی که } M \neq 0$$

۳.۶.۲ مثال‌های توضیحی

۱. مثال ۱: حد $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{3z^2 - 2z}{z^2 - iz + 8}$ را محاسبه کنید.

• صورت و مخرج را بر z^2 تقسیم کنید:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{z}}{1 - \frac{i}{z} + \frac{8}{z^2}} = \frac{3 - 0}{1 - 0 + 0} = 3$$

۶.۲ حدود شامل نقطه در بی‌نهایت

- درجات صورت و مخرج برابر هستند (هر دو ۲)، بنابراین حد برابر نسبت ضرایب اولیه است: $\frac{3}{1} = 3$.

۲. مثال ۲: نشان دهید که $\lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{1}{z} \right]^2 = \infty$.

- برای هر $K > 0$ ، $\delta = \frac{1}{\sqrt{K}}$ را انتخاب کنید. اگر $0 < |z| < \delta$ ، آنگاه:

$$\left| \frac{1}{|z|^2} \right| = \frac{1}{|z|^2} > \frac{1}{\delta^2} = K$$

- بنابراین، حد ∞ است.

۳. مثال ۳: حد $\lim_{z \rightarrow \infty} \sin z$ را تعیین کنید.

- از آنجا که $\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ ، هنگام $|z| \rightarrow \infty$ ، y می‌تواند بزرگ باشد، که $|\sin z|$ را به صورت نمایی اگر $y \neq 0$ ، یا نوسانی اگر $y = 0$ افزایش می‌دهد. حد به مسیر وابسته است، بنابراین وجود ندارد.

۴.۶.۲ کاربردها و نتایج

حدود شامل نقطه در بی‌نهایت برای طبقه‌بندی ناپیوستگی‌ها در تحلیل مختلط ضروری هستند:

- **قطب‌ها:** تابع $f(z)$ قطبی از درجه k در z_0 دارد اگر $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z)$ محدود و غیرصفر باشد.

- **ناپیوستگی‌های اساسی:** اگر رفتار حد پیچیده باشد (مثلاً $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ به یک مقدار واحد یا بی‌نهایت نمی‌رسد)، ناپیوستگی اساسی است، که توسط قضیه کاسوراتی-وایرشراس توصیف

۶.۲ حدود شامل نقطه در بی‌نهایت

می‌شود.

• باقی‌مانده‌ها در بی‌نهایت: در انتگرال‌گیری روی مسیر، باقی‌مانده در ∞ محاسبات را برای انتگرال‌ها روی مسیرهای بسته، به ویژه در کاربردهای دینامیک شارها و الکترواستاتیک، ساده می‌کند.

این حدود همچنین تحلیل رفتار تابع در دامنه‌های بزرگ را تسهیل می‌کنند، که برای نگاشت‌های همدیس و حل مسائل مرزی در فیزیک و مهندسی ضروری است.

۵.۶.۲ زمینه تاریخی

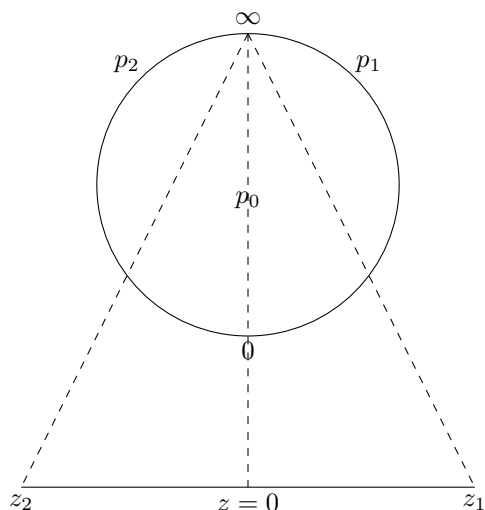
مفهوم نقطه در بی‌نهایت توسط برنهارد ریمان در میانه قرن نوزدهم از طریق معرفی کره ریمان شکل گرفت، که چارچوب هندسی‌ای برای درمان بی‌نهایت به عنوان یک نقطه واحد در صفحه مختلط گسترده شده فراهم کرد. این نوآوری، که بر پایه کارهای زودتر کوشی و وایرستراس درباره حدود بنا شده بود، تحلیل مختلط را با فراهم کردن رویکردی یکپارچه برای حدود، نگاشت‌ها و ناپیوستگی‌ها شامل بی‌نهایت، دگرگون کرد.

۶.۶.۲ شهود

کره ریمان، تصویری زنده از حدود شامل نقطه در بی‌نهایت ارائه می‌دهد. صفحه مختلط را به عنوان یک برگ صاف تصور کنید که روی یک کره واحد پروژه می‌شود، با مبدأ در قطب جنوب و نقاطی که $|z| \rightarrow \infty$ به قطب شمال، نماینده ∞ ، نزدیک می‌شوند. برای $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = L$ ، هنگامی که z از مبدأ دور می‌شود، $f(z)$ به L در صفحه w نزدیک می‌شود، که به نقطه‌ای روی کره متناظر

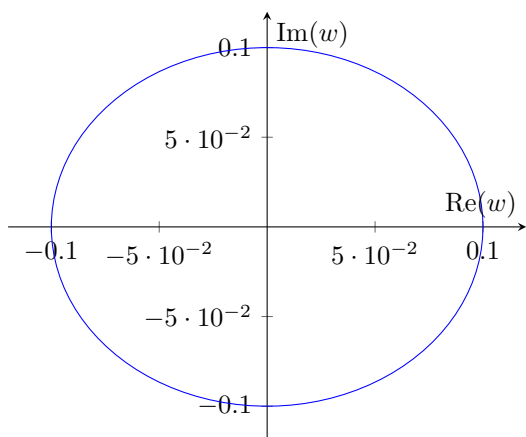
۶.۲ حدود شامل نقطه در بی‌نهایت

است. برای $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ ، هنگامی که z به z_0 نزدیک می‌شود، $f(z)$ به قطب شمال می‌رود، که نشان‌دهنده رشد بی‌نهایت است.

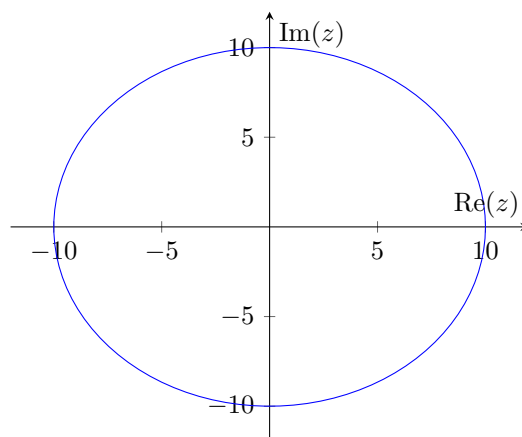


شکل ۱۳.۲: طرح شماتیک کره ریمن. نقطه $z = 0$ در صفحه مختلط به قطب جنوب p_0 نگاشت می‌شود، در حالی که نقاط z_1 و z_2 با $|z|$ بزرگ به نقاط p_1 و p_2 نزدیک به قطب شمال ∞ نگاشت می‌شوند.

w-plane: circle $|w| = 0.1$ for $w = 1/z$



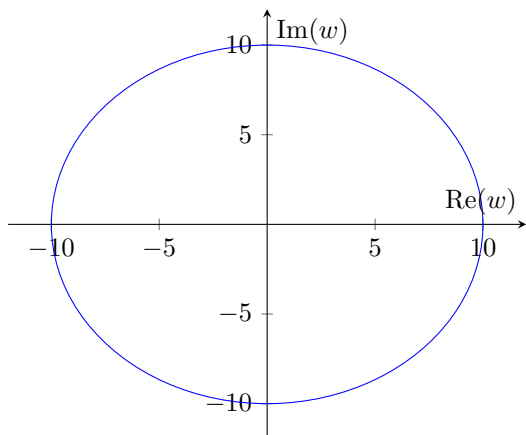
z-plane: circle $|z| = 10$



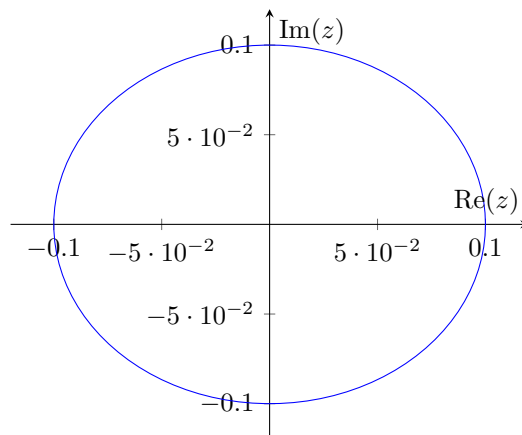
شکل ۱۴.۲: با افزایش $|z|$ ، مقدار $w = 1/z$ به ۰ نزدیک می‌شود. دایره $|z| = 10$ به $|w| = 0.1$ نگاشت می‌شود.

۶.۲ حدود شامل نقطه در بی نهایت

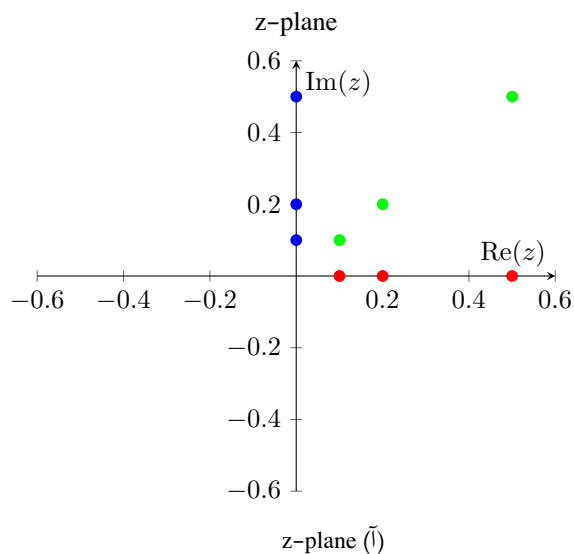
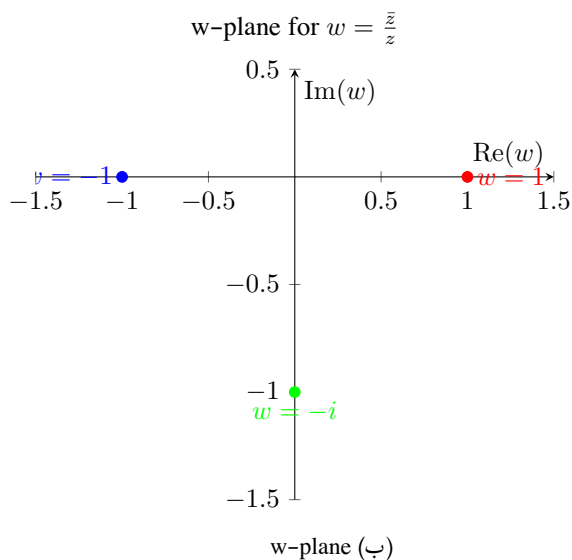
w-plane: circle $|w| = 10$ for $w = 1/z$



z-plane: circle $|z| = 0.1$



شکل ۱۵.۲: با نزدیک شدن z به 0 ، مقدار $w = 1/z$ به ∞ نزدیک می شود. دایره $|z| = 0.1$ به $|w| = 10$ نگاشت می شود.



شکل ۱۶.۲: وابستگی به مسیر برای $f(z) = \frac{z}{z-i}$ هنگامی که $z \rightarrow 0$. نقاط در امتداد محور حقیقی (قرمز) به $w = 1$ ، در امتداد محور موهومی (آبی) به $w = -1$ ، و در امتداد $y = x$ (سبز) به $w = -i$ نگاشت می شوند، که نشان می دهد حد وجود ندارد.

۶.۲ حدود شامل نقطه در بی نهایت

۷.۶.۲ تمرین‌ها

۱. حد $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2 + iz}{2z^2 - 1}$ را محاسبه کنید.

• پاسخ: صورت و مخرج را بر z^2 تقسیم کنید:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{i}{z}}{2 - \frac{1}{z^2}} = \frac{1 + 0}{2 - 0} = \frac{1}{2}$$

۲. نشان دهید که $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{(z-1)^2} = \infty$.

• پاسخ: برای $K > 0$ ، $\delta = \frac{1}{\sqrt{K}}$ را انتخاب کنید. اگر $0 < |z - 1| < \delta$ ، آنگاه:

$$\left| \frac{1}{(z-1)^2} \right| = \frac{1}{|z-1|^2} > \frac{1}{\delta^2} = K$$

۳. حد $\lim_{z \rightarrow \infty} z e^{-z}$ را تعیین کنید.

• پاسخ: هنگام $|z| \rightarrow \infty$ ، اگر $\operatorname{Re}(z) > 0$ ، $e^{-z} \rightarrow 0$ سریع‌تر از $z \rightarrow \infty$ ، بنابراین

حد صفر است. اگر $\operatorname{Re}(z) < 0$ ، $e^{-z} \rightarrow \infty$ ، بنابراین حد ∞ است. از آنجا که حد به

مسیر وابسته است، وجود ندارد.

۸.۶.۲ تمرین‌های دشوارتر

۱. ثابت کنید که برای یک چندجمله‌ای $p(z)$ با درجه $n \geq 1$ ، $\lim_{z \rightarrow \infty} p(z) = \infty$.

۲. برای یک تابع گویا $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ ، که در آن p و q چندجمله‌ای‌هایی با $\deg(p) = \deg(q)$

هستند، نشان دهید که $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \frac{a}{b}$ ، که در آن a و b ضرایب اولیه p و q هستند، به ترتیب.

۳. رفتار حد $\lim_{z \rightarrow \infty} e^{z^2}$ را بررسی کنید. آیا وجود دارد؟ توضیح دهید.

۷.۲ پیوستگی

۱.۷.۲ تعریف

تابع $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ، که در آن $D \subseteq \mathbb{C}$ ، در نقطه $z_0 \in D$ پیوسته است اگر برای هر $\epsilon > 0$ ، عدد $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که برای همه $z \in D$ ، اگر $|z - z_0| < \delta$ ، آنگاه:

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$$

به طور معادل، f در z_0 پیوسته است اگر:

۱. حد $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ وجود داشته باشد،

۲. $f(z_0)$ تعریف شده باشد،

۳. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

تابع در مجموعه $S \subseteq D$ پیوسته است اگر در هر نقطه از S پیوسته باشد. برای تابع $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ، که در آن $z = x + iy$ ، پیوستگی در $z_0 = x_0 + iy_0$ نیاز دارد که هر دو $u(x, y)$ و $v(x, y)$ در (x_0, y_0) از نظر حقیقی پیوسته باشند.

خواص توابع پیوسته مختلط، شبیه به خواص توابع پیوسته در تحلیل حقیقی هستند، اما به صفحه مختلط تعمیم داده شده‌اند:

۱. عملیات جبری: اگر f و g در z_0 پیوسته باشند، آنگاه:

• $f + g$ ، $f - g$ و $f \cdot g$ در z_0 پیوسته هستند.

• $\frac{f}{g}$ در z_0 پیوسته است، به شرطی که $g(z_0) \neq 0$.

۲. ترکیب: اگر f در z_0 پیوسته باشد و g در $f(z_0)$ پیوسته باشد، آنگاه $g \circ f$ در z_0 پیوسته است.

۳. چندجمله‌ای‌ها و توابع گویا: چندجمله‌ای‌ها در همه جای $\mathbb{C}$ پیوسته هستند. توابع گویا $\frac{P(z)}{Q(z)}$ در جایی که $Q(z) \neq 0$ پیوسته هستند.

۴. توابع پایه: توابعی مانند e^z ، $\sin z$ و $\cos z$ در جایی که تعریف شده‌اند، به دلیل تحلیلی بودنشان، پیوسته هستند.

۵. رابطه با مشتق‌پذیری: اگر f در z_0 مشتق‌پذیر باشد، آنگاه f در z_0 پیوسته است، زیرا:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) - f(z_0)] = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (z - z_0) \right] = f'(z_0) \cdot 0 = 0$$

۶. محدود بودن روی مجموعه‌های متراکم: اگر f روی مجموعه متراکم (بسته و محدود) S پیوسته باشد، آنگاه f محدود است و بیشینه و کمینه خود را روی S می‌گیرد.

۳.۷.۲ مثال‌های توضیحی

۱. مثال ۱: پیوستگی چندجمله‌ای

تابع $f(z) = z^2 + 2z + 1$ را در نظر بگیرید. برای نشان دادن پیوستگی در $z_0 = 1 + i$:

$$\lim_{z \rightarrow 1+i} (z^2 + 2z + 1) = (1+i)^2 + 2(1+i) + 1 = (1+2i-1) + 2+2i+1 = 2+4i$$

از آنجا که $f(1+i) = 2+4i$ ، و حد وجود دارد و برابر $f(1+i)$ است، f در z_0 پیوسته است. از آنجا که یک چندجمله‌ای است، در همه جا پیوسته است.

۲. مثال ۲: تابع گویا

تابع $f(z) = \frac{1}{z-i}$ را در نظر بگیرید. برای $z_0 \neq i$ ، مثلاً $z_0 = 0$:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z-i} = \frac{1}{0-i} = -i$$

از آنجا که $f(0) = -i$ ، f در $z = 0$ پیوسته است. آن در همه جا به جز $z = i$ پیوسته است.

۳. مثال ۳: تابع غیرپیوسته

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}}{z}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases} \quad \text{تابع}$$

را در نظر بگیرید. در $z = 0$:

- در امتداد محور حقیقی $(z = x)$: $f(x) = \frac{x}{x} = 1$ ، بنابراین $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$.
- در امتداد محور موهومی $(z = iy)$: $f(iy) = \frac{-iy}{iy} = -1$ ، بنابراین $\lim_{y \rightarrow 0^+} f(iy) = -1$.

از آنجا که حد به مسیر وابسته است، $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ وجود ندارد، بنابراین f در $z = 0$ پیوسته نیست.

۴.۷.۲ کاربردها و نتایج

پیوستگی، سنگ بنای تحلیل مختلط است، که امکان:

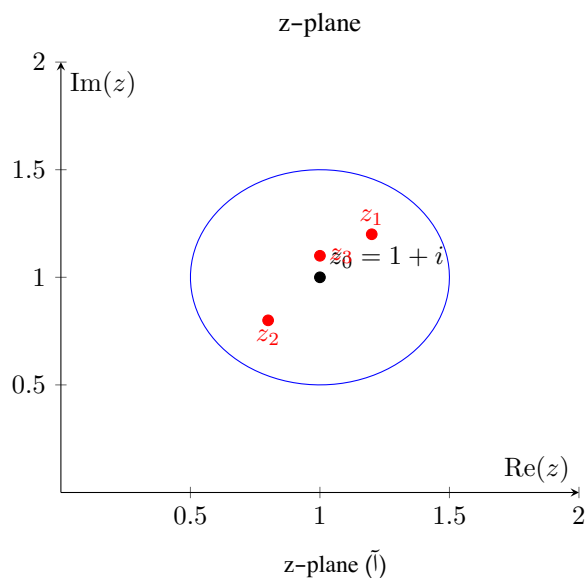
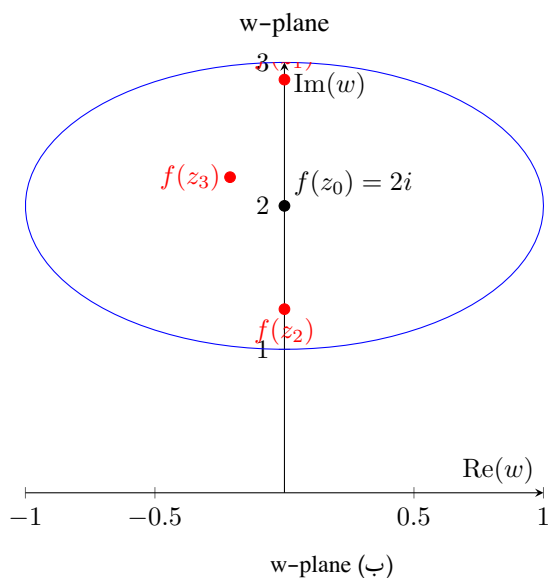
- مشتق‌پذیری: توابع تحلیلی، که در یک منطقه مشتق‌پذیر هستند، پیوسته هستند، که پایه مطالعه توابع مختلط است.
- قضیه مقدار افراطی: توابع پیوسته روی مجموعه‌های متراکم، بیشینه و کمینه خود را می‌گیرند، که در مسائل بهینه‌سازی مفید است.
- انتگرال‌گیری روی مسیر: پیوستگی تضمین می‌کند که انتگرال‌ها روی مسیرها در صفحه مختلط تعریف شده‌اند، که در کاربردهای فیزیک (مانند دینامیک شارها) و مهندسی (مانند پردازش سیگنال) حیاتی است.
- یک نتیجه کلیدی این است که توابع تحلیلی، همه خواص توابع پیوسته را، مانند محدود بودن روی مجموعه‌های متراکم، به ارث می‌برند، که تحلیل سختگیرانه را تسهیل می‌کند.

۵.۷.۲ زمینه تاریخی

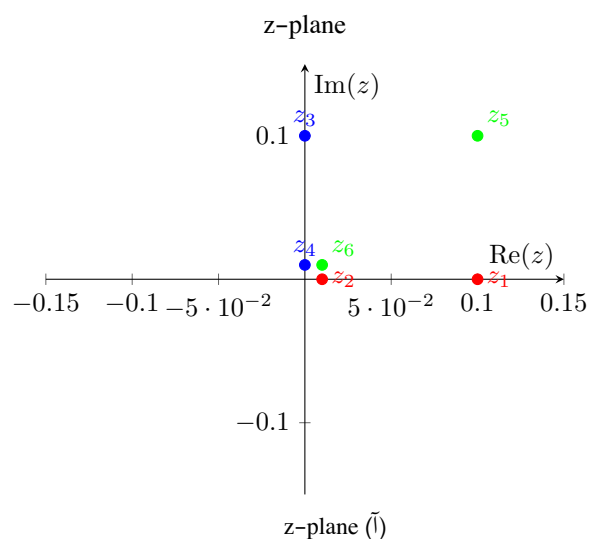
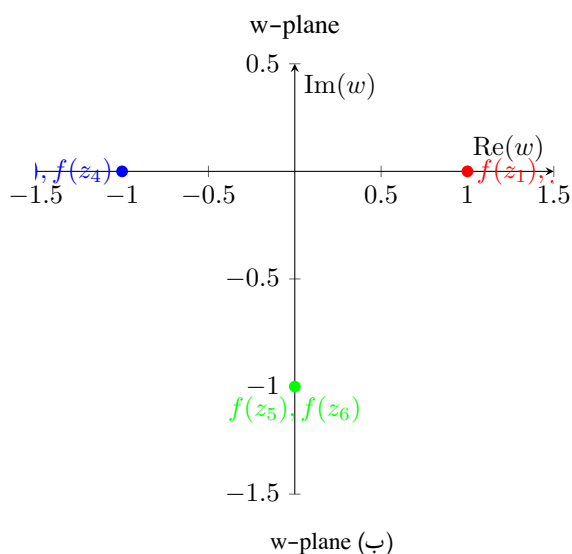
مفهوم پیوستگی در قرن هجدهم توسط لئونارد اویلر و ژان لوروند دالامبر شکل گرفت، اما با کارهای آگوستین-لویی کوشی در قرن نوزدهم، که تعریف دقیق حد را معرفی کرد، به شکل کامل خود رسید. در تحلیل مختلط، این مفهوم توسط برنهارد ریمان و کارل وایرشتراس توسعه یافت، که به بررسی خواص توابع مختلط در صفحه مختلط کمک کرد.

۶.۷.۲ شهود

پیوستگی را می‌توان به عنوان یک خاصیت صاف‌کننده تصور کرد، که تضمین می‌کند تابع در نزدیکی هر نقطه رفتاری نرم و بدون شکاف داشته باشد. برای مثال، تابع $f(z) = z^2$ ، که در همه جا پیوسته است، نقاط نزدیک $z = 1$ را به نقاط نزدیک $w = 1$ نگاشت می‌کند، بدون هیچ قطعی. در مقابل، تابع $f(z) = \frac{1}{z}$ در $z = 0$ پیوسته نیست، زیرا هنگامی که z به صفر نزدیک می‌شود، $f(z)$ به بی‌نهایت می‌رود.



شکل ۱۷.۲: نمایش تعریف اپسیلون-دلتا برای پیوستگی $f(z) = z^2$ در $z_0 = 1 + i$. نقاط z_1, z_2, z_3 در فاصله $\delta = 0.5$ از z_0 به نقاطی در فاصله $\epsilon = 1$ از $f(z_0)$ نگاشت می‌شوند.



شکل ۱۸.۲: نمایش وابستگی به مسیر برای $f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$ هنگامی که $z \rightarrow 0$. نقاط در امتداد محور حقیقی (قرمز) به $w = 1$ ، در امتداد محور موهومی (آبی) به $w = -1$ ، و در امتداد $y = x$ (سبز) به $w = -i$ نگاشت می‌شوند، که نشان می‌دهد حد وجود ندارد و بنابراین f در $z = 0$ ناپیوسته است.

۱. نشان دهید که $f(z) = z^3 - 3z^2 + 2z$ در همه جا پیوسته است.

• پاسخ: از آنجا که $f(z)$ یک چندجمله‌ای است، و چندجمله‌ای‌ها در همه جای صفحه مختلط پیوسته هستند، $f(z)$ در همه جا پیوسته است.

۲. حد $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2+1}{z-i}$ را محاسبه کنید و پیوستگی را بررسی کنید.

• پاسخ: صورت را بازنویسی کنید: $\frac{z^2+1}{z-i} = \frac{(z-i)(z+i)}{z-i} = z+i$ (برای $z \neq i$). بنابراین، $\lim_{z \rightarrow i} (z+i) = i+i = 2i$. از آنجا که $f(i)$ تعریف نشده است (مخرج صفر است)، f در $z = i$ پیوسته نیست.

۳. نشان دهید که $f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}}{z}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$ در $z = 0$ پیوسته نیست.

• پاسخ: برای $z \neq 0$ ، $f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$. در امتداد محور حقیقی، $f(x) = 1$ ، و در امتداد محور موهومی، $f(iy) = -1$. از آنجا که حد به مسیر وابسته است، $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ وجود ندارد، بنابراین f در $z = 0$ پیوسته نیست.

۸.۷.۲ تمرین‌های دشوارتر

۱. ثابت کنید که اگر f در D پیوسته باشد و D بسته و محدود باشد، آنگاه f روی D محدود است.

۲. نشان دهید که اگر f در D پیوسته باشد و D بسته و محدود باشد، آنگاه f بیشینه و کمینه

خود را روی D می‌گیرد.

۸.۲ مشتقات

۱.۸.۲ تعریف

تابع $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ، که در آن $D \subseteq \mathbb{C}$ ، در نقطه $z_0 \in D$ مشتق‌پذیر است اگر حد زیر وجود داشته باشد:

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

به طور معادل، با استفاده از $\Delta z = z - z_0$:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

این حد باید مستقل از مسیر نزدیک شدن z به z_0 باشد، که این ویژگی مشتق‌گیری مختلط را از مشتق‌گیری حقیقی متمایز می‌کند، به دلیل ماهیت دوبعدی صفحه مختلط.

۲.۸.۲ معادلات کوشی-ریمان

برای تابع $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ، که در آن $z = x + iy$ ، مشتق‌پذیر بودن در $z_0 = x_0 + iy_0$ نیازمند وجود مشتقات جزئی u_x, u_y, v_x, v_y در (x_0, y_0) و برآورده شدن معادلات کوشی-ریمان است:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

اگر این معادلات برقرار باشند و مشتقات جزئی پیوسته باشند، f در z_0 مشتق پذیر است، با مشتق:

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - i u_y(x_0, y_0)$$

این معادلات تضمین می کنند که مشتق مستقل از مسیر است.

۳.۸.۲ قوانین مشتق گیری

قوانین مشتق گیری برای توابع مختلط، مشابه تحلیل حقیقی هستند، و برای توابعی که مشتق پذیر باشند، اعمال می شوند:

۱. قانون جمع: اگر f و g در z مشتق پذیر باشند، آنگاه:

$$(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z)$$

۲. قانون ضرب: اگر f و g در z مشتق پذیر باشند، آنگاه:

$$(f \cdot g)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$

۳. قانون تقسیم: اگر f و g در z مشتق پذیر باشند و $g(z) \neq 0$ ، آنگاه:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}$$

۴. قانون زنجیره ای: اگر g در z مشتق پذیر باشد و f در $g(z)$ مشتق پذیر باشد، آنگاه:

$$(f \circ g)'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z)$$

۵. قانون توان: برای $n \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1}$$

۶. قانون نمایی: برای ثابت $c \in \mathbb{C}$:

$$\frac{d}{dz} e^{cz} = c e^{cz}$$

۷. قوانین مثلثاتی:

$$\frac{d}{dz} \sin z = \cos z, \quad \frac{d}{dz} \cos z = -\sin z$$

۸. قانون لگاریتم: برای شاخه مشخص شده لگاریتم:

$$\frac{d}{dz} \log z = \frac{1}{z}$$

این قوانین، محاسبه مشتقات توابع مختلط استاندارد را تسهیل می‌کنند.

۴.۸.۲ مثال‌های توضیحی

۱. چند جمله‌ای: برای $f(z) = z^3 - 2z + 1$ ، مشتق را محاسبه کنید:

$$f'(z) = \frac{d}{dz}(z^3 - 2z + 1) = 3z^2 - 2$$

۲. نمایی: برای $f(z) = e^{2z}$:

$$f'(z) = 2e^{2z}$$

۳. مثلثاتی: برای $f(z) = \sin z$

$$f'(z) = \cos z$$

۴. تأیید کوشی-ریمان: برای $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$ که در آن $u(x, y) = x^2 - y^2$ ،
 $v(x, y) = 2xy$

$$u_x = 2x = v_y, \quad u_y = -2y = -v_x = -2y$$

معادلات کوشی-ریمان برقرار هستند و مشتقات جزئی پیوسته‌اند، بنابراین f در همه جا مشتق‌پذیر است، با:

$$f'(z) = u_x + iv_x = 2x + i2y = 2z$$

۵. تابع غیرمشتق‌پذیر: برای $f(z) = \bar{z} = x - iy$ که در آن $u = x$ ، $v = -y$

$$u_x = 1, \quad v_y = -1, \quad u_y = 0, \quad v_x = 0$$

از آنجا که $u_x \neq v_y$ ، f در هیچ جا مشتق‌پذیر نیست.

۵.۸.۲ خواص مشتقات

• پیوستگی: اگر f در z_0 مشتق‌پذیر باشد، در z_0 پیوسته است، زیرا:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) - f(z_0)] = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (z - z_0) \right] = f'(z_0) \cdot 0 = 0$$

- مشتق‌پذیری بی‌نهایت: تابعی که در یک مجموعه باز مشتق‌پذیر است، بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است، که نشانه توابع هولومورف است.
- تحلیلی بودن: تابعی که در یک مجموعه باز مشتق‌پذیر است، تحلیلی است و با سری توانی قابل نمایش است، خاصیتی منحصر به تحلیل مختلط.
- نگاشت هم‌دیس: مشتق $f'(z_0)$ ، اگر غیرصفر باشد، یک تبدیل خطی محلی را نشان می‌دهد که شامل مقیاس‌دهی با $|f'(z_0)|$ و چرخش با $\arg f'(z_0)$ است و زوایا را حفظ می‌کند.

۶.۸.۲ کاربردها و نتایج

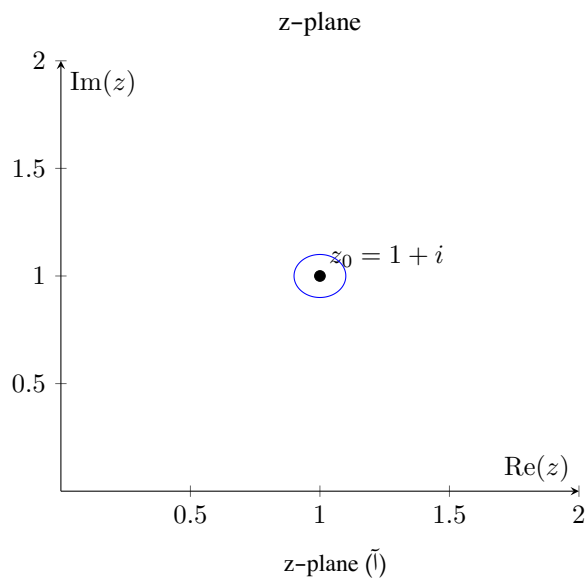
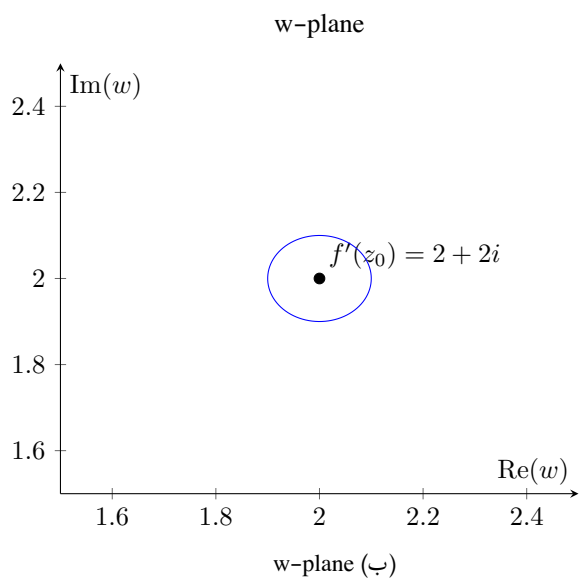
- مشتقات، پایه تعریف توابع هولومورف (تحلیلی) هستند، که در مجموعه‌های باز مشتق‌پذیرند. آنها امکان:
- نگاشت‌های هم‌دیس: در دینامیک شارها و الکترواستاتیک برای تبدیل دامنه‌های پیچیده به اشکال ساده‌تر استفاده می‌شوند.
 - قضیه انتگرال کوشی: مشتق‌پذیری تضمین می‌کند که انتگرال‌ها روی مسیرهای بسته در شرایط خاصی صفر شوند، که در انتگرال‌گیری مختلط حیاتی است.
 - سری‌های توانی: توابع مشتق‌پذیر می‌توانند با سری‌های توانی نمایش داده شوند، که تحلیل در فیزیک و مهندسی را تسهیل می‌کند.
- یک نتیجه کلیدی این است که توابع هولومورف، بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر و تحلیلی هستند، خاصیتی که در تحلیل حقیقی به طور کلی صادق نیست.

۷.۸.۲ زمینه تاریخی

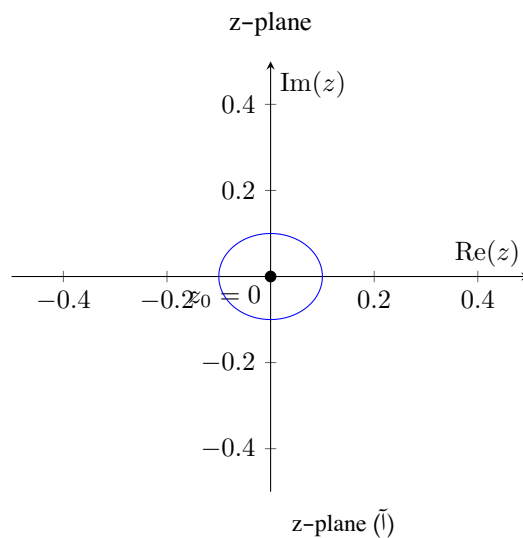
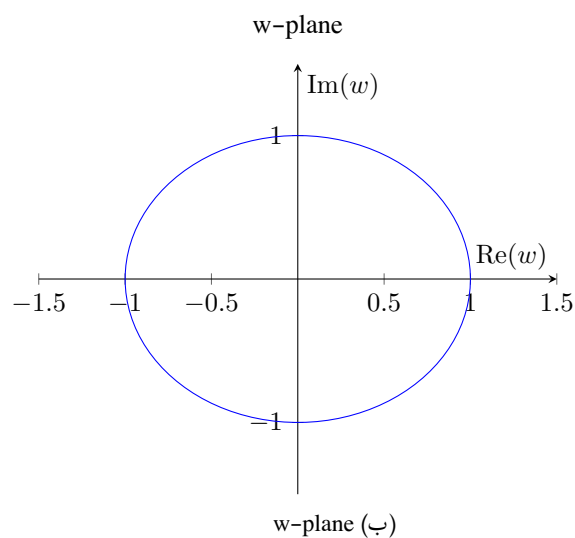
مفهوم مشتقات در تحلیل مختلط در قرن نوزدهم توسط آگوستین-لویی کوشی، که قضیه انتگرال خود را معرفی کرد، و برنهارد ریمان، که کارش بر نظریه توابع و سطوح ریمان بود، توسعه یافت. مشارکت‌های آنها چارچوب دقیقی برای مشتق‌گیری مختلط ایجاد کرد.

۸.۸.۲ شهود

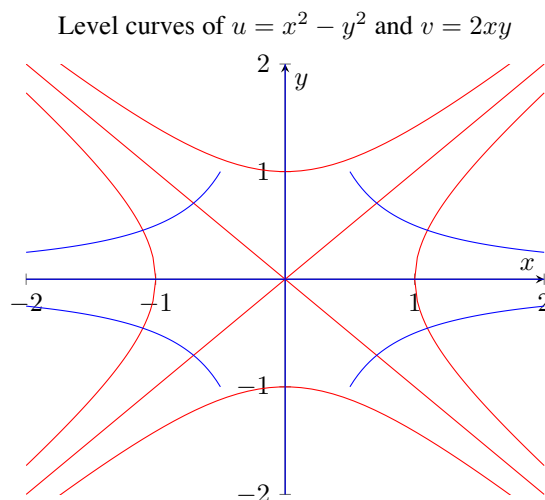
مشتق $f'(z_0)$ در تحلیل مختلط، بهترین تقریب خطی برای $f(z)$ در نزدیکی z_0 را نشان می‌دهد. صفحه مختلط را به عنوان بومی دوبعدی تصور کنید که در آن $f(z_0 + \Delta z) \approx f(z_0) + f'(z_0)\Delta z$. در اینجا، $f'(z_0) = a + ib$ به عنوان یک عدد مختلط عمل می‌کند، که با $|f'(z_0)| = \sqrt{a^2 + b^2}$ مقیاس می‌دهد و با $\arg f'(z_0) = \tan^{-1}(b/a)$ می‌چرخاند. برای مثال، برای $f(z) = z^2$ ، در $z_0 = 1 + i$ ، $f'(z_0) = 2(1 + i) = 2 + 2i$ ، که با $\sqrt{8}$ مقیاس می‌دهد و با $\pi/4$ می‌چرخاند، و هندسه محلی را حفظ می‌کند.



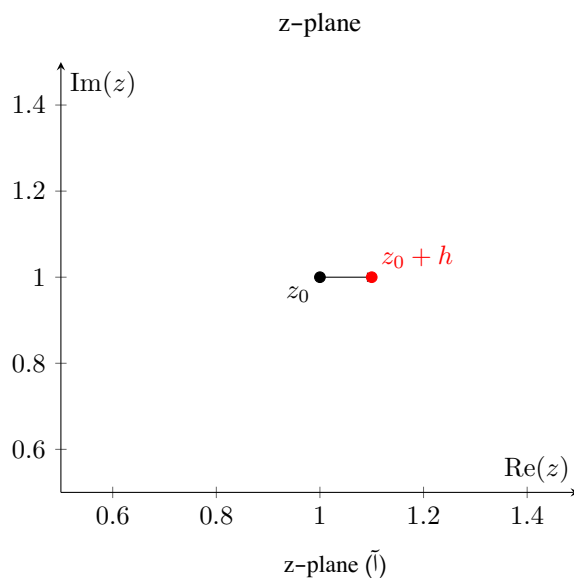
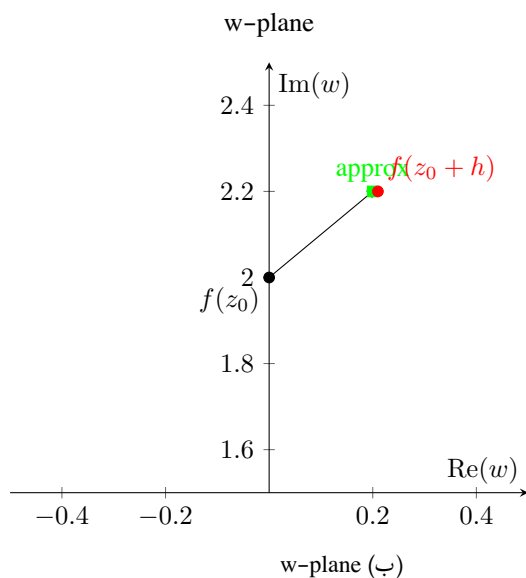
شکل ۱۹.۲: برای $f(z) = z^2$ ، خارج قسمت تفاضلی $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ برای z روی دایره‌ای کوچک حول $z_0 = 1 + i$ به دایره‌ای کوچک حول $f'(z_0) = 2 + 2i$ نگاشت می‌شود.



شکل ۲۰.۲: برای $f(z) = \bar{z}$ ، خارج قسمت تفاضلی $\frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \frac{\bar{z}}{z}$ به دایره واحد نگاشت می‌شود، که نشان می‌دهد حد وجود ندارد.



شکل ۲۱.۲: منحنی‌های تراز $u = x^2 - y^2$ (قرمز) و $v = 2xy$ (آبی) برای $f(z) = z^2$ ، که با زاویه قائم تقاطع می‌کنند، معادلات کوشی-ریمان را نشان می‌دهند.



شکل ۲۲.۲: تقریب خطی برای $f(z) = z^2$ در $z_0 = 1 + i$ با $h = 0.1$. تقریب $f(z_0) + f'(z_0)h$ (مربع سبز) بسیار نزدیک به مقدار واقعی $f(z_0 + h)$ (نقطه قرمز) است.

۹.۸.۲ تمرین‌ها

۱. مشتق $f'(z)$ را برای $f(z) = z^3 - 2z + 1$ محاسبه کنید.

• پاسخ: با استفاده از قوانین جمع و توان:

$$f'(z) = \frac{d}{dz}(z^3 - 2z + 1) = 3z^2 - 2$$

۲. بررسی کنید که آیا $f(z) = |z|^2$ در $z = 0$ مشتق‌پذیر است.

• پاسخ: برای $f(z) = x^2 + y^2$ ، در $z = 0$:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^2 - 0}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z\bar{z}}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \bar{z} = 0$$

بنابراین، $f'(0) = 0$. برای $z \neq 0$ ، $u = x^2 + y^2$ ، $v = 0$ ، پس $u_x = 2x \neq v_y = 0$ ،

که معادلات کوشی-ریمان را جز در $z = 0$ نقض می‌کند.

۳. نشان دهید که $f(z) = \bar{z}$ در هیچ جا مشتق‌پذیر نیست.

• پاسخ: برای $f(z) = x - iy$ ، $u = x$ ، $v = -y$:

$$u_x = 1 \neq v_y = -1, \quad u_y = 0 = -v_x = 0$$

از آنجا که $u_x \neq v_y$ ، معادلات کوشی-ریمان در همه جا نقض می‌شوند.

۴. مشتق $f'(z)$ را برای $f(z) = e^{z^2}$ محاسبه کنید.

۹.۲ فرمول‌های مشتق‌گیری

• پاسخ: با استفاده از قانون زنجیره‌ای، بگذارید $g(z) = z^2$ ، پس $f(z) = e^{g(z)}$. آنگاه:

$$f'(z) = e^{z^2} \cdot g'(z) = e^{z^2} \cdot 2z$$

۱۰.۸.۲ تمرین‌های دشوارتر

۱. تعیین کنید که $f(z) = z \operatorname{Im} z$ در کجا مشتق‌پذیر است.

۲. مشتق $f(z) = \log z$ را، با مشخص کردن شاخه اصلی، محاسبه کنید.

۳. برای $f(z) = z^2 \sin z$ ، مشتق $f'(z)$ را محاسبه کنید و با استفاده از معادلات کوشی-ریمان در $z = i$ تأیید کنید.

۹.۲ فرمول‌های مشتق‌گیری

۱.۹.۲ تعریف

تابع $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ، که در آن $D \subseteq \mathbb{C}$ ، در نقطه $z_0 \in D$ مشتق‌پذیر است اگر حد زیر وجود داشته باشد:

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

این حد باید مستقل از مسیر نزدیک شدن z به z_0 باشد، که نیازمند برآورده شدن معادلات کوشی-ریمان برای تضمین مشتق‌پذیری مختلط است.

۹.۲ فرمول‌های مشتق‌گیری

۲.۹.۲ قوانین مشتق‌گیری

قوانین زیر، مشتق‌گیری توابع مختلط را، با فرض مشتق‌پذیر بودن آنها، اداره می‌کنند. این قوانین مشابه تحلیل حقیقی هستند:

۱. قانون ثابت

$$\frac{d}{dz}c = 0, \quad \text{یک ثابت است } c \in \mathbb{C} \text{ که در آن}$$

۲. قانون همانی

$$\frac{d}{dz}z = 1$$

۳. قانون توان برای $n \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{d}{dz}z^n = nz^{n-1}, \quad \text{اگر } n < 0 \text{ با } z \neq 0$$

۴. قانون جمع اگر f و g در z مشتق‌پذیر باشند:

$$\frac{d}{dz}[f(z) + g(z)] = f'(z) + g'(z)$$

۵. قانون ضرب اگر f و g در z مشتق‌پذیر باشند:

$$\frac{d}{dz}[f(z)g(z)] = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$

۹.۲ فرمول‌های مشتق‌گیری

۶. قانون تقسیم اگر f و g در z مشتق‌پذیر باشند و $g(z) \neq 0$:

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{f(z)}{g(z)} \right] = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}$$

۷. قانون زنجیره‌ای اگر g در z مشتق‌پذیر باشد و f در $g(z)$ مشتق‌پذیر باشد:

$$\frac{d}{dz} [f(g(z))] = f'(g(z)) \cdot g'(z)$$

۳.۹.۲ اشتقاق قوانین کلیدی

قوانین مشتق‌گیری از تعریف مشتق مختلط و خواص حدود در صفحه مختلط استخراج می‌شوند.

• قانون جمع: فرض کنید $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$ و $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = g'(z_0)$. آنگاه:

$$\frac{(f(z) + g(z)) - (f(z_0) + g(z_0))}{z - z_0} = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} + \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}$$

با گرفتن حد وقتی $z \rightarrow z_0$:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} + \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \right] = f'(z_0) + g'(z_0)$$

• قانون ضرب: در نظر بگیرید:

$$\frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0}$$

$$= f(z) \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} + g(z_0) \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} + \frac{(f(z) - f(z_0))(g(z) - g(z_0))}{z - z_0}$$

وقتی $z \rightarrow z_0$ ، عبارت اول به $f(z_0)g'(z_0)$ ، عبارت دوم به $g(z_0)f'(z_0)$ ، و عبارت سوم به صفر نزدیک می‌شود (زیرا f و g مشتق‌پذیر و در نتیجه پیوسته‌اند). بنابراین:

$$(fg)'(z_0) = f(z_0)g'(z_0) + g(z_0)f'(z_0)$$

• قانون تقسیم: برای $g(z_0) \neq 0$ ، در نظر بگیرید:

$$\frac{\frac{f(z)}{g(z)} - \frac{f(z_0)}{g(z_0)}}{z - z_0} = \frac{f(z)g(z_0) - f(z_0)g(z)}{(z - z_0)g(z)g(z_0)}$$

صورت را بازنویسی کنید:

$$f(z)g(z_0) - f(z_0)g(z) = [f(z) - f(z_0)]g(z_0) - f(z_0)[g(z) - g(z_0)]$$

تقسیم بر $z - z_0$:

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} g(z_0) - f(z_0) \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}$$

وقتی $z \rightarrow z_0$ ، این به $f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)$ نزدیک می‌شود، و مخرج به $[g(z_0)]^2$ نزدیک می‌شود، که قانون تقسیم را می‌دهد.

• قانون زنجیره‌ای: بگذارید $w = g(z)$ ، و در نظر بگیرید:

$$\frac{f(g(z)) - f(g(z_0))}{z - z_0} = \frac{f(w) - f(w_0)}{w - w_0} \cdot \frac{w - w_0}{z - z_0}$$

وقتی $z \rightarrow z_0$ ، $w \rightarrow w_0$ ، بنابراین حد برابر $f'(g(z_0)) \cdot g'(z_0)$ است.

۴.۹.۲ مثال‌های توضیحی

۱. قانون توان برای $f(z) = z^4$:

$$f'(z) = 4z^3$$

۲. قانون جمع برای $f(z) = z^3 + 3z$:

$$f'(z) = 3z^2 + 3$$

۳. قانون ضرب برای $f(z) = z^2(z + 1)$:

$$f'(z) = 2z(z + 1) + z^2 \cdot 1 = 2z^2 + 2z + z^2 = 3z^2 + 2z$$

۴. قانون تقسیم برای $f(z) = \frac{z^2}{z-1}$ ، $z \neq 1$:

$$f'(z) = \frac{(2z)(z-1) - z^2 \cdot 1}{(z-1)^2} = \frac{2z^2 - 2z - z^2}{(z-1)^2} = \frac{z^2 - 2z}{(z-1)^2}$$

۵. قانون زنجیره‌ای برای $f(z) = (z^2 + 2)^3$ ، بگذارید $g(z) = z^2 + 2$ ، $h(w) = w^3$. آنگاه:

$$f'(z) = 3(z^2 + 2)^2 \cdot 2z = 6z(z^2 + 2)^2$$

۹.۲ فرمول‌های مشتق‌گیری

۵.۹.۲ کاربردها و نتایج

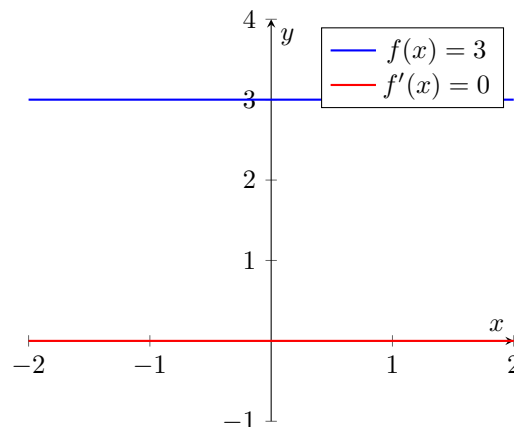
فرمول‌های مشتق‌گیری برای تحلیل توابع هولومورف، که در مجموعه‌های باز مشتق‌پذیرند و در نتیجه بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر و تحلیلی‌اند، ضروری هستند. آنها امکان:

- **نگاشت‌های همدیس:** مشتق $f'(z)$ ، اگر غیرصفر باشد، زوایا را حفظ می‌کند، که در دینامیک شاروها و الکترواستاتیک مفید است.
 - **قضیه انتگرال کوشی:** مشتق‌پذیری، قضیه‌هایی را که انتگرال‌های روی مسیرهای بسته را ساده می‌کنند، پشتیبانی می‌کند.
 - **سری‌های توانی:** توابع مشتق‌پذیر می‌توانند با سری‌های توانی نمایش داده شوند، که تحلیل سیستم‌های پیچیده را تسهیل می‌کند.
- یک نتیجه کلیدی این است که این قوانین، وقتی برای توابع هولومورف اعمال می‌شوند، محاسبات مشتق را با استفاده از معادلات کوشی-ریمان تضمین می‌کنند.

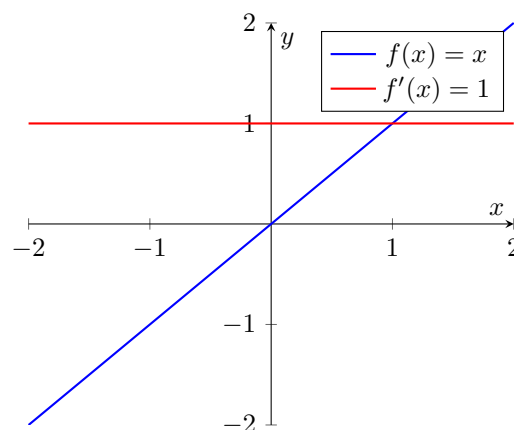
۶.۹.۲ زمینه تاریخی

فرمول‌های مشتق‌گیری برای توابع مختلط در قرن نوزدهم توسط آگوستین-لویی کوشی و برنهارد ریمان رسمی شدند. کار کوشی بر مشتق‌گیری مختلط و معادلات کوشی-ریمان، و مشارکت‌های ریمان در نظریه توابع، پایه این قوانین را تشکیل دادند.

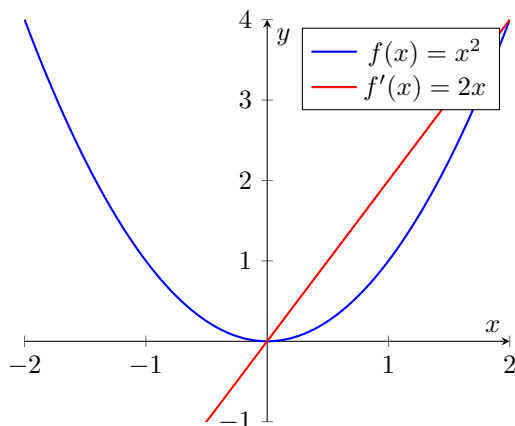
مشتق $f'(z_0)$ در تحلیل مختلط، یک تبدیل خطی را نشان می‌دهد که $f(z) \approx f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ را تقریب می‌زند. صفحه مختلط را به عنوان بومی تصور کنید که در آن $f'(z_0) = a + ib$ با $|f'(z_0)| = \sqrt{a^2 + b^2}$ مقیاس می‌دهد و با $\arg f'(z_0) = \tan^{-1}(b/a)$ می‌چرخاند. برای مثال، برای $f(z) = z^2$ ، در $z_0 = 1 + i$ ، $f'(z_0) = 2(1 + i)$ ، که با $\sqrt{8}$ مقیاس می‌دهد و با $\pi/4$ می‌چرخاند، و هندسه محلی را حفظ می‌کند.



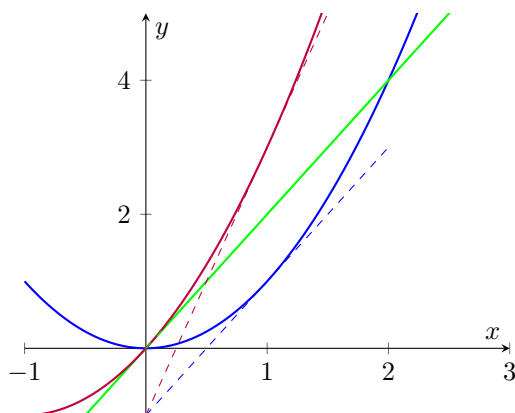
شکل ۲۳.۲: تابع ثابت $f(x) = 3$ (آبی) و مشتق آن $f'(x) = 0$ (قرمز)، که قاعده ثابت را نشان می‌دهد: $\frac{d}{dz} c = 0$.



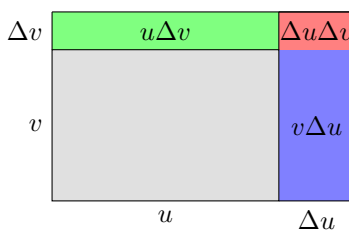
شکل ۲۴.۲: تابع همانی $f(x) = x$ (آبی) و مشتق آن $f'(x) = 1$ (قرمز)، که قاعده همانی را نشان می‌دهد: $\frac{d}{dz} z = 1$.



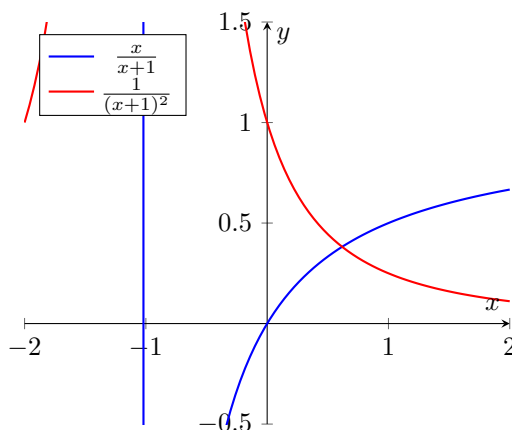
شکل ۲۵.۲: تابع $f(x) = x^2$ (آبی) و مشتق آن $f'(x) = 2x$ (قرمز)، که قاعده توان را برای $n = 2$ نشان می‌دهد: $\frac{d}{dz} z^2 = 2z$.



شکل ۲۶.۲: در $x = 1$ ، شیب خطوط مماس برابر است با $f'(1) = 2$ ، $g'(1) = 2$ و $h'(1) = 4$ ، که قاعده جمع را نشان می‌دهد: $(f + g)' = f' + g'$.



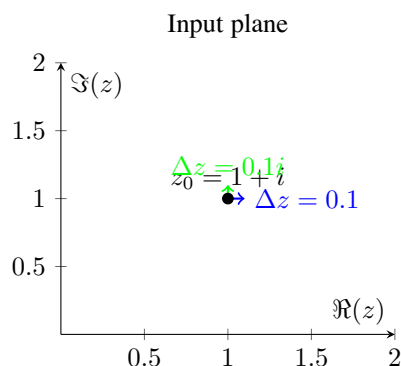
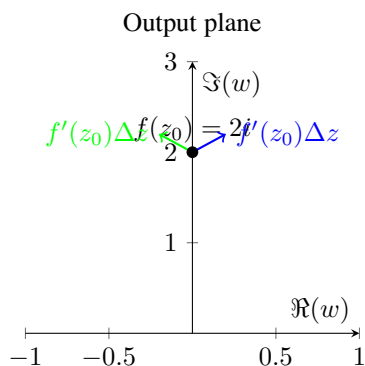
شکل ۲۷.۲: نمایش قاعده ضرب. تغییر در مساحت $\Delta A \approx v\Delta u + u\Delta v$ ، منجر به $\frac{d}{dz}(uv) = v\frac{du}{dz} + u\frac{dv}{dz}$.



شکل ۲۸.۲: مثال از قاعده خارج‌قسمت با $f(x) = \frac{x}{x+1}$ (آبی) و مشتق آن $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ (قرمز)، محاسبه‌شده به صورت $\frac{1 \cdot (x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2}$.

$$\frac{df}{dz} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dz} \quad \begin{matrix} \xrightarrow{\quad} g(z) \quad \xrightarrow{\quad} f(g(z)) \end{matrix}$$

شکل ۲۹.۲: نمایش قاعده زنجیره‌ای: مشتق $f(g(z))$ برابر است با حاصل‌ضرب $\frac{df}{dg}$ و $\frac{dg}{dz}$.



شکل ۳۰.۲: نمایش مشتق به عنوان یک تبدیل خطی برای $f(z) = z^2$ در $z_0 = 1 + i$. بردارها در صفحه ورودی به اندازه $|f'(z_0)| = 2\sqrt{2}$ مقیاس‌بندی شده و به اندازه $\arg f'(z_0) = \pi/4$ در صفحه خروجی چرخانده می‌شوند.

۸.۹.۲ تمرین‌ها

۱. مشتق تابع $f(z) = 3z^4 - 2z^2 + z - 1$ را محاسبه کنید.

• پاسخ:

$$f'(z) = 12z^3 - 4z + 1$$

۲. مشتق $f'(z)$ را برای $f(z) = \frac{z^2+1}{z-i}$ ، که در آن $z \neq i$ ، بیابید.

• پاسخ:

$$f'(z) = \frac{(2z)(z-i) - (z^2+1)(1)}{(z-i)^2} = \frac{z^2 - 2iz - 1}{(z-i)^2}$$

۳. مشتق $\frac{d}{dz}[(z^3+z)^5]$ را محاسبه کنید.

• پاسخ:

$$\frac{d}{dz}[(z^3+z)^5] = 5(z^3+z)^4 \cdot (3z^2+1)$$

۴. مشتق تابع $f(z) = z(z^2-1)$ را محاسبه کنید.

• پاسخ:

$$f'(z) = 1 \cdot (z^2-1) + z \cdot 2z = z^2 - 1 + 2z^2 = 3z^2 - 1$$

۱۰.۲ معادلات کوشی-ریمان

۹.۹.۲ تمرین‌های دشوارتر

۱. نشان دهید که اگر f در z_0 مشتق پذیر باشد و $f(z_0) = 0$ ، آنگاه $\frac{d}{dz}[f(z)]^n = n[f(z)]^{n-1}f'(z)$ در z_0 برای $n \in \mathbb{N}$.

۲. قانون تقسیم را با استفاده از قانون ضرب و قانون زنجیره‌ای برای $f(z)/g(z)$ استخراج کنید.

۳. مشتق $f(z) = \frac{z^3}{(z-1)^2}$ را محاسبه کنید و نتیجه را ساده کنید.

۱۰.۲ معادلات کوشی-ریمان

۱.۱۰.۲ تعریف

برای تابع $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ، که در آن $D \subseteq \mathbb{C}$ ، به صورت $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ با $z = x + iy$ داده شده است، معادلات کوشی-ریمان در نقطه $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ عبارت‌اند از:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

این معادلات شرایط لازم برای مشتق پذیر بودن f در z_0 هستند. اگر مشتقات جزئی u_x, u_y, v_x, v_y در همسایگی z_0 وجود داشته باشند و پیوسته باشند، و معادلات در z_0 برقرار باشند، آنگاه f در z_0 مشتق پذیر است. اگر این معادلات در سراسر مجموعه باز D برقرار باشند و مشتقات جزئی پیوسته باشند، f در D تحلیلی (هولومورف) است.

۲.۱۰.۲ اشتقاق خواص اصلی

معادلات کوشی-ریمان از نیاز به مستقل بودن مشتق مختلط $f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ از مسیر نزدیک شدن ناشی می‌شوند. دو مسیر نزدیک شدن به z_0 را در نظر بگیرید:

• در امتداد محور حقیقی: بگذارید $z = z_0 + h$ ، که در آن h حقیقی است. آنگاه:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h, y_0) + iv(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{h} \\ &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \end{aligned}$$

• در امتداد محور موهومی: بگذارید $z = z_0 + ik$ ، که در آن k حقیقی است. آنگاه:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + k) + iv(x_0, y_0 + k) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{ik} \\ &= \frac{u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0)}{i} = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0) \end{aligned}$$

برای مستقل بودن مشتق از مسیر، بخش‌های حقیقی و موهومی را برابر کنید:

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y$$

این‌ها معادلات کوشی-ریمان هستند. اگر مشتقات جزئی پیوسته باشند، تابع مشتق‌پذیر است، و مشتق برابر است با:

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$$

۳.۱۰.۲ خواص اصلی

۱. لزوم: اگر f در z_0 مشتق‌پذیر باشد، معادلات کوشی-ریمان در z_0 برقرار هستند.
۲. کفایت: اگر مشتقات جزئی وجود داشته باشند، در همسایگی z_0 پیوسته باشند، و معادلات کوشی-ریمان در z_0 برقرار باشند، آنگاه f در z_0 مشتق‌پذیر است.
۳. تحلیلی بودن: اگر معادلات در مجموعه باز D با مشتقات جزئی پیوسته برقرار باشند، f در D تحلیلی است، که بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر بودن و نمایش با سری توانی را دلالت می‌کند.
۴. توابع هارمونیک: اگر f تحلیلی باشد، بخش‌های حقیقی و موهومی آن، u و v ، هارمونیک هستند و معادله لاپلاس را برآورده می‌کنند:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

۴.۱۰.۲ مثال‌های توضیحی

۱. مثال ۱: $f(z) = z^2$ بگذارید $f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$ بنابراین، $u(x, y) = x^2 - y^2$ ، $v(x, y) = 2xy$. مشتقات جزئی را محاسبه کنید:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

مشتقات جزئی در همه جا پیوسته هستند، بنابراین f در همه جا تحلیلی است. مشتق برابر است با:

$$f'(z) = u_x + iv_x = 2x + i2y = 2z$$

۲. مثال ۲: $f(z) = \bar{z}$ بگذارید $f(z) = \bar{z} = x - iy$ ، بنابراین $u = x$ ، $v = -y$. محاسبه کنید:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1 \quad \Rightarrow \quad 1 \neq -1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$$

معادله اول برقرار نیست، بنابراین f در هیچ جا مشتق پذیر نیست.

۳. مثال ۳: $f(z) = |z|^2$ بگذارید $f(z) = x^2 + y^2$ ، بنابراین $u = x^2 + y^2$ ، $v = 0$. محاسبه کنید:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y = 0 \Rightarrow y = 0$$

معادلات فقط در $z = 0$ برقرار هستند. در $z = 0$ ، مشتق پذیری را بررسی کنید:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^2}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \bar{z} = 0$$

بنابراین، f فقط در $z = 0$ مشتق پذیر است، با $f'(0) = 0$.

۴. مثال ۴: $f(z) = e^z$ بگذارید $f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$ ، بنابراین $u = e^x \cos y$ ،

۱۰.۲ معادلات کوشی-ریمان

$v = e^x \sin y$ محاسبه کنید:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

معادلات در همه جا برقرار هستند و مشتقات جزئی پیوسته‌اند، بنابراین f در همه جا تحلیلی است.

۵.۱۰.۲ کاربردها و نتایج

معادلات کوشی-ریمان در تحلیل مختلط نقش محوری دارند:

- **تحلیلی بودن:** آنها تعیین می‌کنند که آیا یک تابع تحلیلی است، که امکان استفاده از قضیه‌های قدرتمندی مانند قضیه انتگرال کوشی را فراهم می‌کند.
 - **نگاشت‌های همدیس:** توابع تحلیلی زوایا را حفظ می‌کنند، که در دینامیک شارها برای مدل‌سازی پتانسیل‌های سرعت و توابع جریان مفید است.
 - **توابع هارمونیک:** بخش‌های حقیقی و موهومی یک تابع تحلیلی، هارمونیک هستند و معادله لاپلاس را برآورده می‌کنند، که در الکترواستاتیک و انتقال حرارت حیاتی است.
 - **مهندسی:** در پردازش سیگنال، توابع تحلیلی تحلیل فرکانس را ساده می‌کنند.
- یک نتیجه کلیدی این است که اگر f تحلیلی باشد، بخش‌های حقیقی و موهومی آن توابع هارمونیک مزدوج هستند، که حل مسائل فیزیکی را تسهیل می‌کند.

۱۰.۲ معادلات کوشی-ریمان

۶.۱۰.۲ شکل قطبی معادلات کوشی-ریمان

در مختصات قطبی، که در آن $z = re^{i\theta}$ و $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ ، معادلات کوشی-ریمان به صورت زیر هستند:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

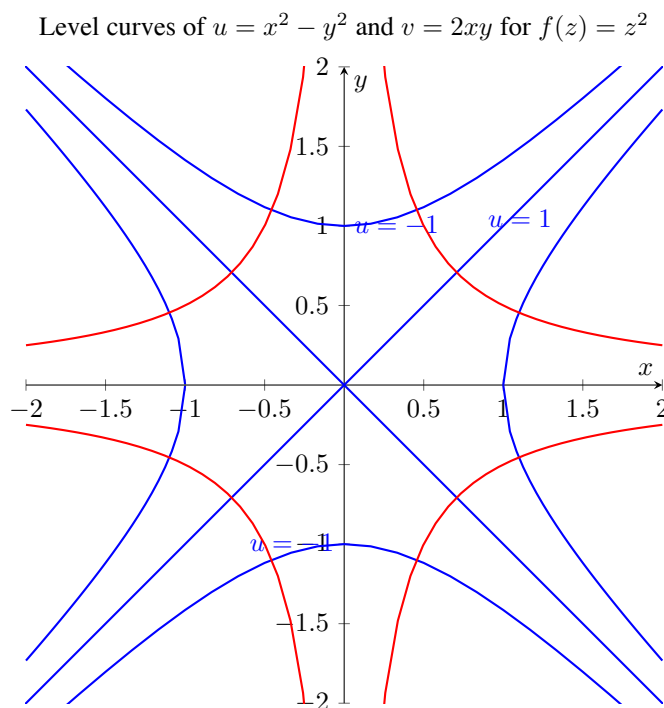
این شکل برای توابعی که در قالب قطبی تعریف شده‌اند، مانند $f(z) = \frac{1}{z}$ ، مفید است.

۷.۱۰.۲ زمینه تاریخی

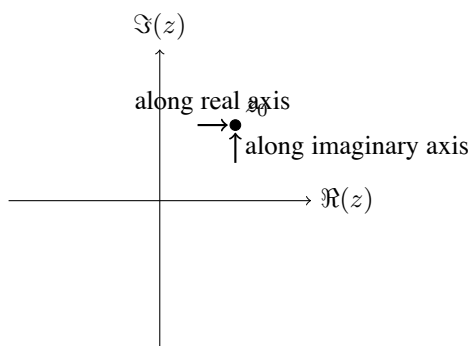
معادلات کوشی-ریمان ابتدا توسط ژان لوروند دالامبر در سال ۱۷۵۲ در مطالعه دینامیک شاره‌ها شناسایی شدند. آنها بعداً توسط آگوستین-لویی کوشی در زمینه انتگرال‌گیری مختلط و توسط برنهارد ریمان در کارهایش بر نظریه توابع و سطوح ریمان رسمی شدند، که نقش محوری آنها در تحلیل مختلط را تثبیت کرد.

۸.۱۰.۲ شهود

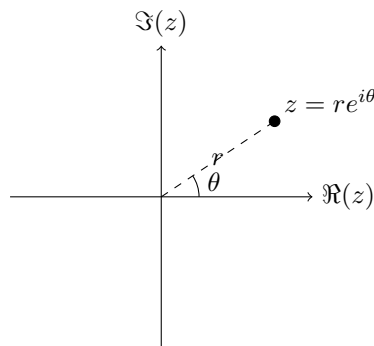
معادلات کوشی-ریمان تضمین می‌کنند که یک تابع مختلط در صفحه مختلط به طور نرم رفتار می‌کند. صفحه مختلط را به عنوان بومی دوبعدی تصور کنید که در آن $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ نقاط را نگاشت می‌کند. معادلات $u_x = v_y$ ، $u_y = -v_x$ دلالت دارند که گرادیان‌های u و v عمود بر هم هستند، که رفتار همدیس تابع را تضمین می‌کند. برای مثال، برای $f(z) = z^2$ ، بخش حقیقی $u = x^2 - y^2$ و بخش موهومی $v = 2xy$ منحنی‌های تراز عمود را تشکیل می‌دهند، که ماهیت همدیس تابع را منعکس می‌کند.



شکل ۳۱.۲: منحناهای هم‌تراز $u = x^2 - y^2$ (آبی) و $v = 2xy$ (قرمز) برای تابع تحلیلی $f(z) = z^2$. منحناهای با زاویه قائمه تقاطع می‌کنند، همان‌طور که با علامت زاویه نشان داده شده است، که خاصیت هم‌ریختی را نشان می‌دهد که توسط معادلات کوشی-ریمان تضمین شده است.



شکل ۳۲.۲: نزدیک شدن به z_0 در امتداد محور حقیقی و محور موهومی. معادلات کوشی-ریمان تضمین می‌کنند که مشتق محاسبه‌شده در امتداد این مسیرهای مختلف یکسان است.



شکل ۳۳.۲: نمایش یک نقطه z در صفحه مختلط با استفاده از مختصات قطبی (r, θ) . شکل قطبی معادلات کوشی-ریمان مشتقات جزئی را نسبت به r و θ مرتبط می‌کند.

۹.۱۰.۲ تمرین‌ها

۱. تأیید کنید که $f(z) = z^3$ معادلات کوشی-ریمان را در همه جا برآورده می‌کند.

• پاسخ: بگذارید $f(z) = z^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$ ، بنابراین $u = x^3 - 3xy^2$ ، $v = 3x^2y - y^3$.

$$u_x = 3x^2 - 3y^2, \quad v_y = 3x^2 - 3y^2 \quad \Rightarrow \quad u_x = v_y$$

$$u_y = -6xy, \quad v_x = 6xy \quad \Rightarrow \quad u_y = -v_x$$

مشتقات جزئی پیوسته هستند، بنابراین f در همه جا تحلیلی است.

۲. تعیین کنید که $f(z) = z \operatorname{Im} z$ در کجا مشتق‌پذیر است.

• پاسخ: بگذارید $f(z) = (x + iy)y = xy + iy^2$ ، بنابراین $u = xy$ ، $v = y^2$.

$$u_x = y, \quad v_y = 2y \quad \Rightarrow \quad y = 2y \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

۱۰.۲ معادلات کوشی-ریمان

$$u_y = x, \quad v_x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

معادلات فقط در $z = 0$ برقرار هستند. مشتق پذیری را بررسی کنید:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \operatorname{Im} z}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{Im} z = 0$$

بنابراین، f فقط در $z = 0$ مشتق پذیر است.

۳. نشان دهید که اگر f تحلیلی باشد، آنگاه u و v هارمونیک هستند.

• پاسخ: برای $f = u + iv$ تحلیلی، $u_x = v_y$ ، $u_y = -v_x$ ، با مشتقات جزئی پیوسته.

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} v_y = v_{yx}, \quad u_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} (-v_x) = -v_{xy}$$

از آنجا که $v_{yx} = v_{xy}$ ، $u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$. به طور مشابه، $v_{xx} + v_{yy} = 0$.

۱۰.۱۰.۲ تمرین‌های دشوارتر

۱. ثابت کنید که اگر $f(z)$ تحلیلی و غیرثابت باشد، آنگاه $|f(z)|$ نمی‌تواند در داخل دامنه‌اش بیشینه داشته باشد.

۲. معادلات کوشی-ریمان را برای $f(z) = \frac{1}{z}$ در مختصات قطبی تأیید کنید و نشان دهید که در $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ تحلیلی است.

۳. تمام توابع سرتاسری $f(z)$ را بیابید که $f(0) = 1$ و $f'(z) = f(z)$ برای همه $z \in \mathbb{C}$ را برآورده کنند.

۱۱.۲ شرایط کافی برای مشتق پذیری

۱۱.۲ شرایط کافی برای مشتق پذیری

۱.۱۱.۲ تعریف

تابع $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ، که در آن $D \subseteq \mathbb{C}$ ، در نقطه $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ مشتق پذیر است اگر حد زیر وجود داشته باشد:

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

این حد باید مستقل از مسیر نزدیک شدن z به z_0 باشد. برای $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ، شرایط کافی برای مشتق پذیری در z_0 عبارتند از:

۱. مشتقات جزئی مرتبه اول u_x, u_y, v_x, v_y در همسایگی (x_0, y_0) وجود داشته باشند.

۲. این مشتقات جزئی در (x_0, y_0) پیوسته باشند.

۳. معادلات کوشی-ریمان در (x_0, y_0) برقرار باشند:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

اگر این شرایط برآورده شوند، f در z_0 مشتق پذیر است، و مشتق برابر است با:

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)$$

۱۱.۲ شرایط کافی برای مشتق پذیری

۲.۱۱.۲ اشتقاق خواص اصلی

کفایت این شرایط با اطمینان از وجود حد تعریف کننده مشتق و مستقل بودن آن از مسیر تضمین می شود. بگذارید $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ، و در نظر بگیرید $z = z_0 + h$ ، که در آن $h = \Delta x + i\Delta y$ کسر تفاضل برابر است با:

$$\begin{aligned} & \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \\ &= \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) + i[v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)]}{\Delta x + i\Delta y} \end{aligned}$$

از آنجا که u و v دارای مشتقات جزئی پیوسته هستند، از قضیه مقدار میانگین برای توابع حقیقی استفاده کنید:

$$u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = u(x_0, y_0) + u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1, \quad \epsilon_1/|h| \rightarrow 0$$

$$v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = v(x_0, y_0) + v_x(x_0, y_0)\Delta x + v_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_2, \quad \epsilon_2/|h| \rightarrow 0$$

بنابراین:

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = [u_x\Delta x + u_y\Delta y + i(v_x\Delta x + v_y\Delta y)] + \epsilon_1 + i\epsilon_2$$

با استفاده از معادلات کوشی-ریمان $(u_y = -v_x, u_x = v_y)$:

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = [u_x\Delta x + u_y\Delta y + i(-u_y\Delta x + u_x\Delta y)] + \epsilon_1 + i\epsilon_2$$

$$= u_x(\Delta x + i\Delta y) - iu_y(\Delta x + i\Delta y) + \epsilon_1 + i\epsilon_2 = (u_x + iv_x)h + \epsilon_1 + i\epsilon_2$$

۱۱.۲ شرایط کافی برای مشتق پذیری

با تقسیم بر h :

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = u_x + iv_x + \frac{\epsilon_1 + i\epsilon_2}{h}$$

وقتی $h \rightarrow 0$ ، $\frac{\epsilon_1 + i\epsilon_2}{h} \rightarrow 0$ به دلیل پیوستگی، بنابراین:

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$$

پیوستگی مشتقات جزئی، وجود حد را تضمین می‌کند.

۳.۱۱.۲ خواص اصلی

۱. کفایت برای مشتق پذیری: این شرایط تضمین می‌کنند که مشتق وجود دارد و مستقل از مسیر است.
۲. تحلیلی بودن: اگر شرایط در مجموعه باز D برقرار باشند، f در D تحلیلی است، که بی‌نهایت بار مشتق پذیر بودن و نمایش با سری توانی را دلالت می‌کند.
۳. همدیسی: اگر $f'(z_0) \neq 0$ ، تابع در z_0 زوایا را حفظ می‌کند، که در نگاشت‌های همدیس مفید است.
۴. توابع هارمونیک: بخش‌های حقیقی و موهومی یک تابع تحلیلی، هارمونیک هستند و معادله لاپلاس را برآورده می‌کنند.

۱۱.۲ شرایط کافی برای مشتق پذیری

۴.۱۱.۲ مثال‌های توضیحی

۱. تابع نمایی: بگذارید $f(z) = e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$ ، بنابراین $u = e^x \cos y$ ، $v = e^x \sin y$.

- مشتقات جزئی: $u_x = e^x \cos y$ ، $u_y = -e^x \sin y$ ، $v_x = e^x \sin y$ ، $v_y = e^x \cos y$.
- معادلات کوشی-ریمان: $u_x = v_y$ ، $u_y = -v_x$.
- همه مشتقات جزئی در همه جا پیوسته هستند.
- بنابراین، f در همه جا تحلیلی است، با $f'(z) = e^z$.

۲. تابع چندجمله‌ای: بگذارید $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$ ، بنابراین $u = x^2 - y^2$ ، $v = 2xy$.

- مشتقات جزئی: $u_x = 2x$ ، $u_y = -2y$ ، $v_x = 2y$ ، $v_y = 2x$.
- معادلات کوشی-ریمان: $u_x = v_y$ ، $u_y = -v_x$.
- پیوسته در همه جا.
- بنابراین، f در همه جا تحلیلی است، با $f'(z) = 2z$.

۳. مشتق پذیری محدود: بگذارید $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ ، بنابراین $u = x^2 + y^2$ ، $v = 0$.

- مشتقات جزئی: $u_x = 2x$ ، $u_y = 2y$ ، $v_x = 0$ ، $v_y = 0$.
- معادلات کوشی-ریمان: $2x = 0$ ، $2y = 0$ فقط در $z = 0$ برقرار است.
- در $z = 0$: $f'(0) = 0$ ، تأیید شده توسط تعریف حد.

۱۱.۲ شرایط کافی برای مشتق‌پذیری

• در جاهای دیگر، شرایط برقرار نیستند، بنابراین f فقط در $z = 0$ مشتق‌پذیر است.

۵.۱۱.۲ کاربردها و نتایج

شرایط کافی برای مشتق‌پذیری، شناسایی توابع تحلیلی را، که در مجموعه‌های باز مشتق‌پذیرند و دارای خواص قدرتمندی هستند، ممکن می‌سازد:

- **نگاشت‌های همدیس:** توابع تحلیلی با مشتقات غیرصفر، زوایا را حفظ می‌کنند، که در دینامیک شاره‌ها برای مدل‌سازی پتانسیل‌های سرعت استفاده می‌شود.
- **تحلیل هارمونیک:** بخش‌های حقیقی و موهومی توابع تحلیلی، هارمونیک هستند و معادله لاپلاس را برآورده می‌کنند، که در الکترواستاتیک و انتقال حرارت حیاتی است.
- **سری‌های توانی:** توابع تحلیلی دارای نمایش‌های سری توانی هستند، که محاسبات انتگرال و باقی‌مانده را تسهیل می‌کند.

یک نتیجه کلیدی این است که تابعی که این شرایط را در مجموعه باز برآورده کند، تحلیلی است، که امکان کاربردهایی در فیزیک و مهندسی، مانند پردازش سیگنال و نظریه کنترل، را فراهم می‌کند.

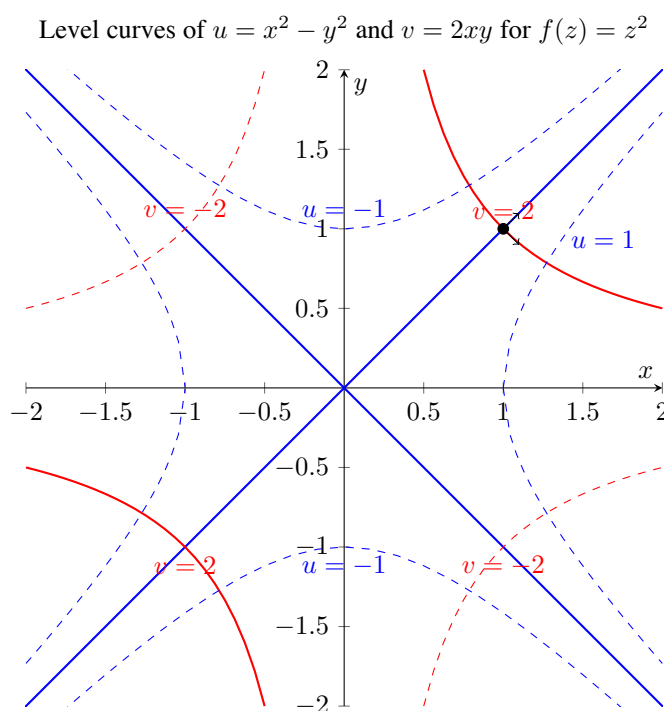
۶.۱۱.۲ زمینه تاریخی

شرایط کافی برای مشتق‌پذیری در قرن نوزدهم توسط آگوستین-لویی کوشی، که معادلات کوشی-ریمان را توسعه داد، و برنهارد ریمان، که کارش بر نظریه توابع و سطوح ریمان بود، رسمی شدند. مشارکت‌های آنها چارچوب دقیقی برای مشتق‌گیری مختلط فراهم کرد.

۱۱.۲ شرایط کافی برای مشتق پذیری

۷.۱۱.۲ شهود

شرایط کافی تضمین می‌کنند که تابع به طور نرم در صفحه مختلط رفتار می‌کند. صفحه مختلط را به عنوان بومی دوبعدی تصور کنید که در آن $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ نقاط را نگاشت می‌کند. معادلات کوشی-ریمان دلالت دارند که گرادیان‌های u و v عمود بر هم هستند، که رفتار همدیس تابع را تضمین می‌کند. برای مثال، برای $f(z) = z^2$ ، بخش حقیقی $u = x^2 - y^2$ و بخش موهومی $v = 2xy$ منحنی‌های تراز عمود را تشکیل می‌دهند، که ماهیت همدیس تابع را منعکس می‌کند.



شکل ۳۴.۲: منحنی‌های هم‌تراز $u = x^2 - y^2$ (آبی) و $v = 2xy$ (قرمز) برای $f(z) = z^2$. خطوط توپر نشان‌دهنده $v = 2$ و $u = 0$ هستند که در $(1, 1)$ تقاطع می‌کنند، جایی که زاویه بین مماس‌های آن‌ها 90° است، همان‌طور که علامت‌گذاری شده است.

۱۱.۲ شرایط کافی برای مشتق پذیری



شکل ۳۵.۲: نمایش مشتق به عنوان یک تبدیل خطی برای $f(z) = z^2$ در $z_0 = 1 + i$. بردارهای عمود بر هم در صفحه ورودی به بردارهای عمود بر هم در صفحه خروجی نگاشت می‌شوند، که حفظ زاویه را نشان می‌دهد.

۸.۱۱.۲ تمرین‌ها

۱. تأیید کنید که $f(z) = z^3$ شرایط کافی برای مشتق پذیری را در همه جا برآورده می‌کند.

• پاسخ: بگذارید $f(z) = z^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$ ، بنابراین $u = x^3 - 3xy^2$ ، $v = 3x^2y - y^3$.

$$u_x = 3x^2 - 3y^2, \quad v_y = 3x^2 - 3y^2 \quad \Rightarrow \quad u_x = v_y$$

$$u_y = -6xy, \quad v_x = 6xy \quad \Rightarrow \quad u_y = -v_x$$

مشتقات جزئی پیوسته هستند، بنابراین f در همه جا تحلیلی است، با $f'(z) = 3z^2$.

۲. تعیین کنید که $f(z) = z \operatorname{Re} z$ در کجا مشتق پذیر است.

• پاسخ: بگذارید $f(z) = (x + iy)x = x^2 + ixy$ ، بنابراین $u = x^2$ ، $v = xy$.

$$u_x = 2x, \quad v_y = x \quad \Rightarrow \quad 2x = x \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

۱۲.۲ مختصات قطبی

$$u_y = 0, \quad v_x = y \quad \Rightarrow \quad 0 = -y \Rightarrow y = 0$$

شرایط فقط در $z = 0$ برقرار هستند، که در آن $f'(0) = 0$.

۳. نشان دهید که اگر f در z_0 مشتق پذیر باشد، آنگاه u و v در (x_0, y_0) هارمونیک هستند.

• پاسخ: اگر f مشتق پذیر باشد، $u_x = v_y$ ، $u_y = -v_x$. محاسبه کنید:

$$u_{xx} = v_{yx}, \quad u_{yy} = -v_{xy}$$

از آنجا که $v_{yx} = v_{xy}$ ، $u_{xx} + u_{yy} = 0$. به طور مشابه، $v_{xx} + v_{yy} = 0$.

۹.۱۱.۲ تمرین های دشوارتر

۱. ثابت کنید که اگر f در z_0 مشتق پذیر باشد و $f'(z_0) \neq 0$ ، آنگاه f در z_0 هم دیس است.

۲. شرایط کافی را برای $f(z) = \frac{1}{z}$ در $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ تأیید کنید.

۳. تمام نقاطی که $f(z) = |z|^4$ در آنها مشتق پذیر است را تعیین کنید.

۱۲.۲ مختصات قطبی

۱.۱۲.۲ تعریف

در تحلیل مختلط، یک عدد مختلط z به صورت مختصات قطبی به شکل زیر بیان می شود:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta),$$

که در آن $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ قدر مطلق است، و $\theta = \arg z$ آرگومان است، با مقدار اصلی معمولاً در $(-\pi, \pi]$ با استفاده از فرمول اویلر، این به طور معادل نوشته می‌شود:

$$z = re^{i\theta}, \quad e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

۲.۱۲.۲ خواص اصلی

استفاده از مختصات قطبی چندین خاصیت کلیدی برای اعداد مختلط و توابع ارائه می‌دهد:

۱. قدر مطلق و آرگومان: قدر مطلق r منحصر به فرد است، در حالی که آرگومان θ تا مضارب 2π تعیین می‌شود.

۲. عملیات در شکل قطبی:

• ضرب: برای $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ ، $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$

• تقسیم: برای $z_2 \neq 0$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

• توان: برای عدد صحیح n

$$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)).$$

• ریشه: ریشه‌های n -ام $z = re^{i\theta}$ عبارت‌اند از:

$$z^{1/n} = r^{1/n} e^{i(\theta/n + 2k\pi/n)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

۳. نمایش تابع: یک تابع مختلط $f(z)$ می‌تواند به صورت $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ بیان شود، که تحلیل توابعی با وابستگی‌های شعاعی یا زاویه‌ای را تسهیل می‌کند.

۳.۱۲.۲ معادلات کوشی-ریمان در مختصات قطبی

برای تابع $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ ، که در آن $z = re^{i\theta}$ ، معادلات کوشی-ریمان در شکل قطبی برای مشتق‌پذیری در $z \neq 0$ ضروری و کافی هستند، به شرطی که مشتقات جزئی پیوسته باشند:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}.$$

اگر این معادلات در یک مجموعه باز با مشتقات جزئی پیوسته برقرار باشند، f تحلیلی است. مشتق می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$f'(z) = e^{-i\theta} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right).$$

۴.۱۲.۲ اشتقاق معادلات کوشی-ریمان در شکل قطبی

برای اشتقاق این معادلات، تابع $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ را در نظر بگیرید، با $z = x + iy$ ، $x = r \cos \theta$ ، $y = r \sin \theta$. معادلات کوشی-ریمان در مختصات دکارتی عبارت‌اند از:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

با استفاده از قانون زنجیره‌ای، مشتقات جزئی دکارتی و قطبی را به هم مربوط کنید:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1}(y/x).$$

محاسبه کنید:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\sin \theta}{r}.$$

به طور مشابه:

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r}.$$

بنابراین:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r}.$$

برای v ، عبارات مشابهی برقرار است. با جایگذاری در معادلات کوشی-ریمان دکارتی و ساده‌سازی، شکل قطبی به دست می‌آید، که معادل بودن آنها را تأیید می‌کند.

۱. تابع $f(z) = z^n$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$f(z) = r^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)), \quad u(r, \theta) = r^n \cos(n\theta), \quad v(r, \theta) = r^n \sin(n\theta).$$

مشتقات جزئی:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = nr^{n-1} \cos(n\theta), \quad \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = nr^{n-1} \cos(n\theta).$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -nr^{n-1} \sin(n\theta), \quad -\frac{\partial v}{\partial r} = -nr^{n-1} \sin(n\theta).$$

معادلات کوشی-ریمان برقرار هستند، و مشتقات جزئی پیوسته‌اند، بنابراین $f(z) = z^n$ در همه جا تحلیلی است. مشتق:

$$f'(z) = nz^{n-1} = nr^{n-1}e^{i(n-1)\theta}.$$

۲. تابع $f(z) = \frac{1}{z}$ ، $z \neq 0$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$f(z) = \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \frac{1}{r}(\cos \theta - i \sin \theta), \quad u = \frac{\cos \theta}{r}, \quad v = -\frac{\sin \theta}{r}.$$

مشتقات:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\cos \theta}{r^2}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{\cos \theta}{r^2}.$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\sin \theta}{r^2}, \quad -\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\sin \theta}{r^2}.$$

معادلات برقرار هستند، و مشتقات جزئی برای $r \neq 0$ پیوسته‌اند، بنابراین f در $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ تحلیلی است.

۶.۱۲.۲ کاربردها و نتایج

مختصات قطبی در تحلیل مختلط برای موارد زیر ضروری هستند:

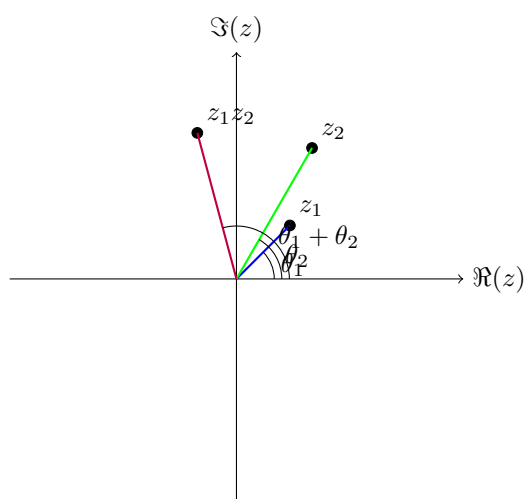
- توابع چندمقداری: تسهیل تحلیل توابعی مانند $\log z$ یا $z^{1/n}$.
- تقارن شعاعی: ساده‌سازی مسائل با الگوهای دایره‌ای یا شعاعی.
- نگاشت‌های همدیس: تحلیل توابعی مانند z^n یا e^z در شکل قطبی.
- انتگرال‌گیری مختلط: ساده‌سازی انتگرال‌های کانتور حول مبدأ.

یک نتیجه کلیدی این است که توابعی که معادلات کوشی-ریمان قطبی را در یک مجموعه باز (با مشتقات جزئی پیوسته) برآورده می‌کنند، تحلیلی هستند و خواصی مانند مشتق‌پذیری بی‌نهایت و نمایش‌های سری توانی را به ارث می‌برند.

۷.۱۲.۲ زمینه تاریخی

استفاده از مختصات قطبی در ریاضیات به اخترشناسان یونان باستان بازمی‌گردد، اما کاربرد آنها در تحلیل مختلط توسط لئونارد اویلر در قرن هجدهم متحول شد. فرمول اویلر، $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ، که در سال ۱۷۴۸ معرفی شد، جبر و هندسه را به هم پیوند داد و امکان نمایش قطبی اعداد و توابع مختلط را فراهم کرد. این چارچوب توسط کوشی و ریمان در قرن نوزدهم برای تحلیل توابع تحلیلی توسعه یافت.

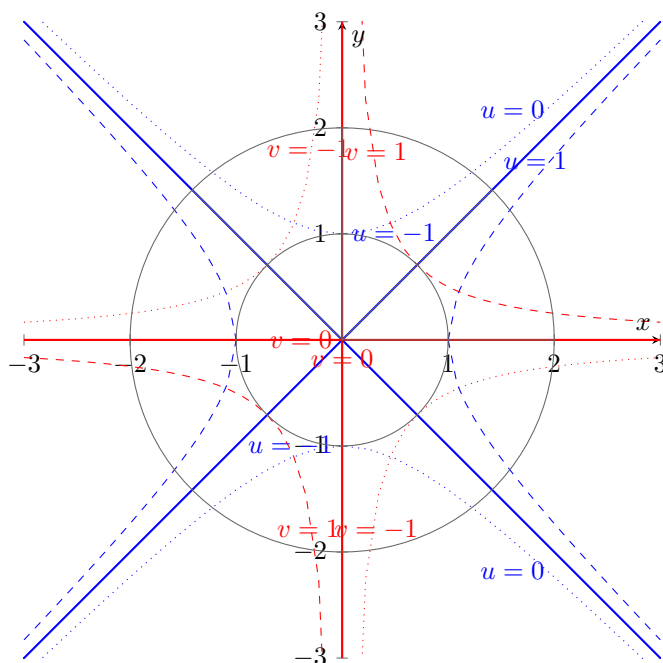
مختصات قطبی، صفحه مختلط را به سیستمی تبدیل می‌کنند که در آن نقاط با فاصله r از مبدأ و زاویه θ از محور حقیقی مثبت تعریف می‌شوند. برای تابعی مانند $f(z) = z^n$ ، یک دایره با شعاع r به دایره‌ای با شعاع r^n نگاشت می‌شود، با زاویه ضربدر n ، که برای n غیرصحیح، اثری مارپیچی ایجاد می‌کند. معادلات کوشی-ریمان در شکل قطبی تضمین می‌کنند که بخش‌های حقیقی و موهومی تابع، منحنی‌های تراز عمود را تشکیل دهند، که هندسه محلی را حفظ می‌کند، همان‌طور که در وابستگی‌های شعاعی و زاویه‌ای توابعی مانند e^z دیده می‌شود.



شکل ۳۶.۲: ضرب دو عدد مختلط $z_1 = e^{i\pi/4}$ و $z_2 = 2e^{i\pi/3}$ در شکل قطبی. حاصل ضرب $z_1 z_2 = 2e^{i(7\pi/12)}$ دارای اندازه $r_1 r_2 = 2$ و زاویه $\theta_1 + \theta_2 = \frac{7\pi}{12}$ است.



شکل ۳۷.۲: تبدیل شبکه قطبی تحت $f(z) = z^2$. دایره‌های با شعاع r به دایره‌های با شعاع r^2 نگاشت می‌شوند، و خطوط شعاعی در زاویه θ به خطوط شعاعی در زاویه 2θ نگاشت می‌شوند.



شکل ۳۸.۲: منحنای هم‌تراز $u = x^2 - y^2$ (آبی) و $v = 2xy$ (قرمز) برای $f(z) = z^2$ ، همراه با یک شبکه قطبی (خاکستری) از دایره‌ها و خطوط شعاعی. منحنای هم‌تراز به صورت متعامد تقاطع می‌کنند، که خاصیت هم‌ریختی را نشان می‌دهد که توسط معادلات کوشی-ریمان در شکل قطبی تضمین شده است.

۱. تأیید کنید که $f(z) = z^3$ معادلات کوشی-ریمان را در مختصات قطبی برآورده می‌کند.

• پاسخ: بگذارید $f(z) = z^3 = r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$ ، بنابراین $u = r^3 \cos 3\theta$ ،
 $v = r^3 \sin 3\theta$.

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 3r^2 \cos 3\theta, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \cdot 3r^3 \cos 3\theta = 3r^2 \cos 3\theta.$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \cdot (-3r^3 \sin 3\theta) = -3r^2 \sin 3\theta, \quad -\frac{\partial v}{\partial r} = -3r^2 \sin 3\theta.$$

معادلات برقرار هستند، و مشتقات جزئی پیوسته‌اند، بنابراین f در همه جا تحلیلی است.

۲. نشان دهید که $f(z) = \log z$ ، برای شاخه اصلی $(-\pi < \theta \leq \pi)$ ، معادلات کوشی-ریمان را در مختصات قطبی برآورده می‌کند.

• پاسخ: بگذارید $f(z) = \ln r + i\theta$ ، بنابراین $u = \ln r$ ، $v = \theta$.

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \cdot 1 = \frac{1}{r}.$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0, \quad -\frac{\partial v}{\partial r} = 0.$$

معادلات برای $r \neq 0$ برقرار هستند، که مشتق‌پذیری در $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ را تأیید می‌کند.

۳. تأیید کنید که $f(z) = \frac{1}{z^2}$ معادلات کوشی-ریمان را برای $z \neq 0$ برآورده می‌کند.

۱۳.۲ توابع تحلیلی

• پاسخ: بگذارید $f(z) = \frac{1}{r^2}(\cos 2\theta - i \sin 2\theta)$ ، بنابراین $u = \frac{\cos 2\theta}{r^2}$ ، $v = -\frac{\sin 2\theta}{r^2}$.

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{2 \cos 2\theta}{r^3}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \cdot \left(-\frac{2 \cos 2\theta}{r^2} \right) = -\frac{2 \cos 2\theta}{r^3}.$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \cdot \left(-\frac{2 \sin 2\theta}{r^2} \right) = -\frac{2 \sin 2\theta}{r^3}, \quad -\frac{\partial v}{\partial r} = -\left(\frac{2 \sin 2\theta}{r^3} \right) = -\frac{2 \sin 2\theta}{r^3}.$$

معادلات برقرار هستند، که تحلیلی بودن برای $z \neq 0$ را تأیید می‌کند.

۱۰.۱۲.۲ تمرین‌های دشوارتر

۱. تعیین کنید که $f(z) = |z|$ در کجا مشتق‌پذیر است با استفاده از مختصات قطبی.

۲. برای $f(z) =$

۱۳.۲ توابع تحلیلی

۱.۱۳.۲ تعریف

تابعی $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ، که در آن $D \subseteq \mathbb{C}$ یک مجموعه باز است، تحلیلی (یا هولومورف) در D نامیده می‌شود اگر در هر نقطه $z \in D$ مشتق‌پذیر مختلط باشد. یعنی، برای هر $z_0 \in D$ ، حد

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

وجود داشته باشد و مستقل از مسیری باشد که z از طریق آن به z_0 نزدیک می‌شود. تابعی که در کل صفحه مختلط تحلیلی باشد، سرتاسری نامیده می‌شود.

۲.۱۳.۲ خواص اصلی

توابع تحلیلی دارای خواص قابل توجهی هستند که آنها را در تحلیل مختلط متمایز می‌کند:

(آ) معادلات کوشی-ریمان: اگر $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ، که در آن $z = x + iy$ ، در D تحلیلی باشد، آنگاه بخش‌های حقیقی و موهومی آن معادلات زیر را برآورده می‌کنند:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

با مشتقات جزئی پیوسته در سراسر D .

(ب) مشتق‌پذیری بی‌نهایت: اگر f در D تحلیلی باشد، در D بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است، و هر مشتق $f^{(n)}$ نیز تحلیلی است.

(ج) نمایش سری توانی: برای هر $z_0 \in D$ ، یک سری توانی وجود دارد

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

که به $f(z)$ در یک دیسک متمرکز در z_0 درون D همگرا می‌شود.

(د) عملیات جبری: اگر f و g در D تحلیلی باشند، آنگاه:

• $f + g$ و $f - g$ در D تحلیلی هستند.

• $f \cdot g$ در D تحلیلی است.

• $\frac{f}{g}$ در $\{z \in D \mid g(z) \neq 0\}$ تحلیلی است.

• اگر g در D تحلیلی باشد و f در مجموعه‌ای حاوی $g(D)$ تحلیلی باشد، آنگاه $f \circ g$ در D تحلیلی است.

(ه) توابع هارمونیک: بخش‌های حقیقی و موهومی u و v یک تابع تحلیلی، معادله لاپلاس را برآورده می‌کنند:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

که آنها را توابع هارمونیک می‌سازد.

(و) همدیسی: اگر $f'(z_0) \neq 0$ ، f زوایا را در z_0 حفظ می‌کند، خاصیتی که به عنوان همدیسی شناخته می‌شود و در تبدیل‌های هندسی مفید است.

۳.۱۳.۲ اشتقاق خواص کلیدی

خواص از تعریف تحلیلی بودن و معادلات کوشی-ریمان ناشی می‌شوند. برای مثال، مشتق‌پذیری بی‌نهایت از این واقعیت ناشی می‌شود که مشتق‌پذیری در معنای مختلط، وجود تمام مشتقات بالاتر را دلالت می‌کند، که نتیجه‌ای از نمایش سری توانی است. برای تأیید هارمونیک بودن، $f = u + iv$ تحلیلی را در نظر بگیرید. از معادلات کوشی-ریمان:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

مشتق بگیرید:

$$u_{xx} = v_{yx}, \quad u_{yy} = -v_{xy}$$

از آنجا که $v_{yx} = v_{xy}$ (با فرض پیوستگی مشتقات مرتبه دوم)، داریم:

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$$

به طور مشابه، $v_{xx} + v_{yy} = 0$ ، که تأیید می‌کند u و v هارمونیک هستند. نمایش سری توانی یک نتیجه عمیق است که تضمین می‌کند یک تابع تحلیلی می‌تواند به صورت محلی توسط چندجمله‌ای‌ها تقریب زده شود، خاصیتی که از قضیه‌های انتگرال‌گیری مختلط ناشی می‌شود.

۴.۱۳.۲ مثال‌های توضیحی

(آ) چندجمله‌ای: تابع $f(z) = z^3 - 2z + 1$ را در نظر بگیرید. به عنوان یک چندجمله‌ای، در همه جا مشتق‌پذیر است، بنابراین سرتاسری (تحلیلی در $\mathbb{C}$) است.

(ب) تابع نمایی: بگذارید $f(z) = e^z = e^x \cos y + i e^x \sin y$. معادلات کوشی-ریمان را تأیید کنید:

$$u_x = e^x \cos y = v_y, \quad u_y = -e^x \sin y = -v_x$$

مشتقات جزئی پیوسته هستند، بنابراین f سرتاسری است، با $f'(z) = e^z$.

(ج) تابع گویا: بگذارید $f(z) = \frac{z}{z-1}$ ، $z \neq 1$. محاسبه کنید:

$$f'(z) = \frac{(z-1) \cdot 1 - z \cdot 1}{(z-1)^2} = -\frac{1}{(z-1)^2}$$

این تابع در $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ تحلیلی است.

(د) تابع غیرتحلیلی: بگذارید $f(z) = \bar{z} = x - iy$. معادلات کوشی-ریمان برقرار نیستند:

$$u_x = 1 \neq v_y = -1$$

بنابراین، f در هیچ جا تحلیلی نیست.

(ه) تابع مثلثاتی: بگذارید $f(z) = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$. از آنجا که e^{iz} و e^{-iz} سرتاسری هستند، ترکیب خطی آنها سرتاسری است، بنابراین $\sin z$ در $\mathbb{C}$ تحلیلی است.

۵.۱۳.۲ کاربردها و نتایج

توابع تحلیلی در تحلیل مختلط مرکزی هستند و کاربردهای گسترده‌ای دارند:

- نگاشت‌های همدیس: توابع تحلیلی با مشتقات غیرصفر، زوایا را حفظ می‌کنند، که در دینامیک شاره‌ها برای مدل‌سازی جریان‌های بدون چرخش و در نقشه‌نگاری برای طرح‌های نقشه استفاده می‌شوند.
- تحلیل هارمونیک: ماهیت هارمونیک بخش‌های حقیقی و موهومی آنها در حل معادله لاپلاس در الکترواستاتیک و انتقال حرارت حیاتی است.
- انتگرال‌گیری مختلط: توابع تحلیلی، قضیه‌های قدرتمندی مانند قضیه انتگرال کوشی را ممکن می‌سازند، که انتگرال‌های کانتور را در فیزیک و مهندسی ساده می‌کند.
- پردازش سیگنال: در مهندسی، توابع تحلیلی، پایه تبدیل‌های فوریه و لاپلاس برای تحلیل سیگنال‌ها را تشکیل می‌دهند.

یک نتیجه کلیدی این است که توابع تحلیلی بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر هستند و دارای نمایش‌های

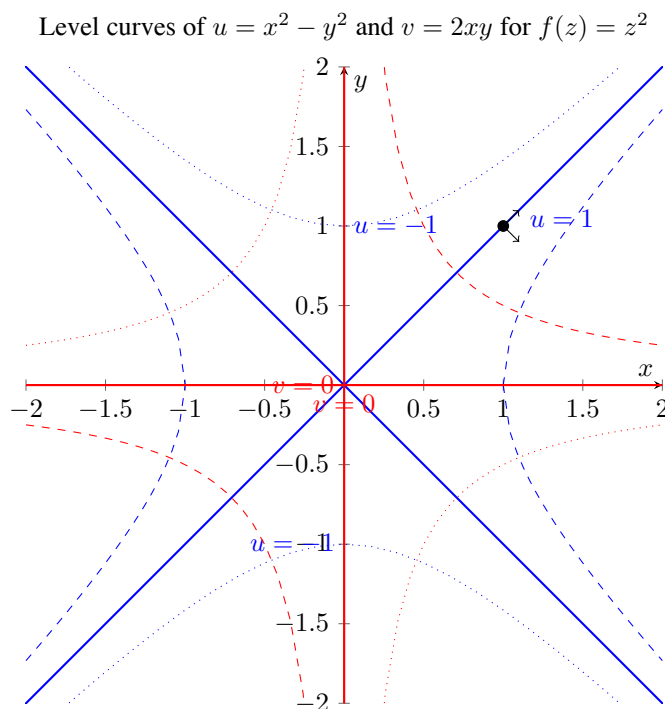
سری توانی می‌باشند، که آنها را در مقایسه با توابع مشتق‌پذیر حقیقی، بسیار خوب رفتار می‌سازد.

۶.۱۳.۲ زمینه تاریخی

نظریه توابع تحلیلی در قرن نوزدهم توسط آگوستین-لویی کوشی، که معادلات کوشی-ریمان و قضیه‌های انتگرال را بنا نهاد، و برنهارد ریمان، که کارش بر نظریه توابع و سطوح ریمان، خواص آنها را رسمی کرد، توسعه یافت. کارل وایرشراس با تأکید بر نمایش‌های سری توانی، درک مدرن از تحلیلی بودن را تثبیت کرد.

۷.۱۳.۲ شهود

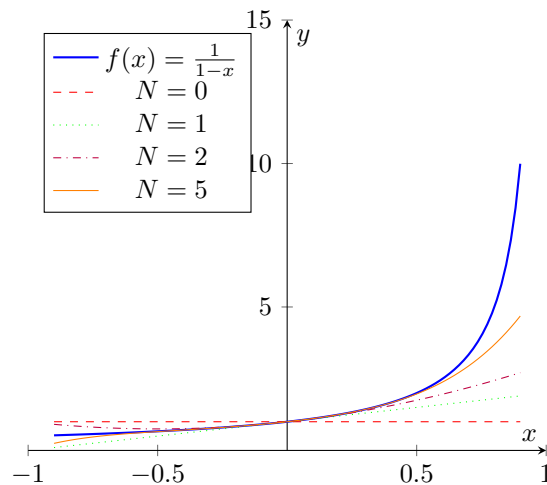
توابع تحلیلی را می‌توان به عنوان نگاشت‌های نرم در صفحه مختلط تجسم کرد، که اشکال کوچک را در حالی که زوایا را حفظ می‌کنند، تبدیل می‌کنند، زمانی که $f'(z) \neq 0$. برای مثال، $f(z) = z^2$ یک شبکه از خطوط را به شبکه‌ای از سهمی‌ها نگاشت می‌کند، با مقیاس‌دهی محلی به اندازه $|f'(z)| = |2z|$ و چرخش به اندازه $\arg(2z)$. این خاصیت همدیسی تضمین می‌کند که اشکال کوچک قابل تشخیص باقی می‌مانند، ویژگی‌ای که در کاربردهایی مانند آیرودینامیک، که الگوهای جریان مدل‌سازی می‌شوند، مورد استفاده قرار می‌گیرد.



شکل ۳۹.۲: منحنای هم‌تراز $u = x^2 - y^2$ (آبی) و $v = 2xy$ (قرمز) برای تابع تحلیلی $f(z) = z^2$. منحنای با زاویه قائمه تقاطع می‌کنند، همان‌طور که با زاویه $\theta = 90^\circ$ در $(1, 1)$ نشان داده شده است، که خاصیت هم‌ریختی را نشان می‌دهد.



شکل ۴۰.۲: نمایش هم‌ریختی برای $f(z) = z^2$ در $z_0 = 1 + i$. بردارهای عمود بر هم Δz_1 و Δz_2 در دامنه به بردارهای عمود بر هم در برد نگاشت می‌شوند، که زاویه $\theta = 90^\circ$ را حفظ می‌کند.



شکل ۴۱.۲: تقریب $f(x) = \frac{1}{1-x}$ توسط مجموع‌های جزئی سری تیلور $\sum_{n=0}^N x^n$ برای $N = 0, 1, 2, 5$. سری برای $|x| < 1$ به $f(x)$ همگرا می‌شود.

۸.۱۳.۲ تمرین‌ها

(آ) تأیید کنید که $f(z) = z^3 - 2z + 1$ در $\mathbb{C}$ تحلیلی است.

• پاسخ: به عنوان یک چندجمله‌ای، $f(z)$ در همه جا مشتق‌پذیر است، بنابراین سرتاسری است.

(ب) نشان دهید که $f(z) = e^{2z}$ در $\mathbb{C}$ تحلیلی است و مشتق آن را محاسبه کنید.

• پاسخ: بگذارید $f(z) = e^{2z}$. با استفاده از قانون زنجیره‌ای، $f'(z) = 2e^{2z}$. از آنجا که e^{2z} سرتاسری است، f در $\mathbb{C}$ تحلیلی است.

(ج) تعیین کنید که $f(z) = \frac{z^2}{z-i}$ در کجا تحلیلی است.

• پاسخ: این تابع کسری از چندجمله‌ای‌هاست، و در جایی که مخرج $z - i \neq 0$ ، یعنی $z \neq i$ ، تحلیلی است. بنابراین، در $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ تحلیلی است.

(د) بررسی کنید که آیا $f(z) = |z|^2$ در جایی تحلیلی است.

• پاسخ: بگذارید $f(z) = x^2 + y^2$ ، پس $u = x^2 + y^2$ ، $v = 0$. معادلات کوشی-ریمان:

$$u_x = 2x = v_y = 0 \implies x = 0, \quad u_y = 2y = -v_x = 0 \implies y = 0$$

فقط در $z = 0$ برآورده می‌شود، که در آن $f'(0) = 0$. از آنجا که تحلیلی بودن نیازمند مشتق‌پذیری در یک مجموعه باز است، f در هیچ جا تحلیلی نیست.

(ه) تأیید کنید که $\sin z$ سرتاسری است با استفاده از معادلات کوشی-ریمان.

• پاسخ: بگذارید $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ ، پس $u = \sin x \cosh y$ ، $v = \cos x \sinh y$.

$$u_x = \cos x \cosh y = v_y, \quad u_y = \sin x \sinh y = -v_x$$

مشتقات جزئی پیوسته هستند، بنابراین $\sin z$ سرتاسری است.

(و) تعیین کنید که $f(z) = \log z$ (شاخه اصلی) در کجا تحلیلی است.

• پاسخ: تحلیلی در $\mathbb{C} \setminus \{z \mid z \leq 0\}$ ، همان‌طور که در مختصات قطبی تأیید شده است.

۹.۱۳.۲ تمرین‌های دشوارتر

(آ) ثابت کنید که اگر f در دامنه متصل D تحلیلی باشد و $f(z) = 0$ برای همه z در یک زیرمجموعه باز غیرخالی از D ، آنگاه $f(z) = 0$ برای همه $z \in D$.

۱۴.۲ مثال‌های توابع تحلیلی

(ب) نشان دهید که اگر f در دامنه D تحلیلی و غیرثابت باشد، آنگاه $|f(z)|$ نمی‌تواند در D به بیشینه برسد.

(ج) تمام توابع سرتاسری f را بیابید که $f(0) = 1$ و $f'(z) = f(z)$ برای همه $z \in \mathbb{C}$.

(د) تعیین کنید که آیا $f(z) = z \operatorname{Re} z$ در جایی تحلیلی است.

۱۴.۲ مثال‌های توابع تحلیلی

۱.۱۴.۲ تعریف

تابع $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ، که در آن $D \subseteq \mathbb{C}$ یک مجموعه باز است، تحلیلی (یا هولومورف) در D نامیده می‌شود اگر در هر نقطه $z \in D$ مشتق‌پذیر مختلط باشد. یعنی، برای هر $z_0 \in D$ ، حد

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

وجود داشته باشد و مستقل از مسیر نزدیک شدن باشد. تابعی که در کل صفحه مختلط تحلیلی باشد، سرتاسری نامیده می‌شود.

۲.۱۴.۲ خواص اصلی

توابع تحلیلی دارای خواص قابل توجهی هستند که آنها را در تحلیل مختلط متمایز می‌کند:

(آ) معادلات کوشی-ریمان: اگر $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ، که در آن $z = x + iy$ ، در

D تحلیلی باشد، آنگاه بخش‌های حقیقی و موهومی آن معادلات زیر را برآورده می‌کنند:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

با مشتقات جزئی پیوسته در سراسر D .

(ب) مشتق‌پذیری بی‌نهایت: اگر f در D تحلیلی باشد، در D بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است، و هر مشتق $f^{(n)}$ نیز تحلیلی است.

(ج) نمایش سری توانی: برای هر $z_0 \in D$ ، یک سری توانی وجود دارد

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

که به $f(z)$ در یک دیسک متمرکز در z_0 درون D همگرا می‌شود.

(د) توابع هارمونیک: بخش‌های حقیقی و موهومی u و v یک تابع تحلیلی، معادله لاپلاس را برآورده می‌کنند:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

که آنها را توابع هارمونیک می‌سازد.

(ه) همدیسی: اگر $f'(z_0) \neq 0$ ، f زوایا را در z_0 حفظ می‌کند، خاصیتی که به عنوان همدیسی شناخته می‌شود و در تبدیل‌های هندسی مفید است.

(و) عملیات جبری: اگر f و g در D تحلیلی باشند، آنگاه:

• $f + g$ و $f - g$ در D تحلیلی هستند.

• $f \cdot g$ در D تحلیلی است.

۱۴.۲ مثال‌های توابع تحلیلی

• $\frac{f}{g}$ در $\{z \in D \mid g(z) \neq 0\}$ تحلیلی است.

• اگر g در D تحلیلی باشد و f در مجموعه‌ای حاوی $g(D)$ تحلیلی باشد، آنگاه $f \circ g$ در D تحلیلی است.

۳.۱۴.۲ اشتقاق خواص

خواص از تعریف تحلیلی بودن و معادلات کوشی-ریمان ناشی می‌شوند. برای مثال، مشتق‌پذیری بی‌نهایت از این واقعیت ناشی می‌شود که مشتق‌پذیری در معنای مختلط، وجود تمام مشتقات بالاتر را دلالت می‌کند، که نتیجه‌ای از نمایش سری توانی است. برای تأیید هارمونیک بودن، $f = u + iv$ تحلیلی را در نظر بگیرید. از معادلات کوشی-ریمان:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

مشتق بگیرید:

$$u_{xx} = v_{yx}, \quad u_{yy} = -v_{xy}$$

از آنجا که $v_{yx} = v_{xy}$ (با فرض پیوستگی مشتقات مرتبه دوم)، داریم:

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$$

به طور مشابه، $v_{xx} + v_{yy} = 0$ ، که تأیید می‌کند u و v هارمونیک هستند. نمایش سری توانی یک نتیجه عمیق است که تضمین می‌کند یک تابع تحلیلی می‌تواند به صورت محلی توسط چندجمله‌ای‌ها تقریب زده شود، خاصیتی که از قضیه‌های انتگرال‌گیری مختلط ناشی می‌شود.

مثال‌های زیر، که از تحلیل مختلط استاندارد گرفته شده‌اند، ماهیت توابع تحلیلی را نشان می‌دهند:

(آ) تابع چندجمله‌ای: $f(z) = z^3 - 2z + 1$ - به عنوان یک چندجمله‌ای، $f(z)$ در همه جا مشتق‌پذیر است، بنابراین سرتاسری است. با استفاده از معادلات کوشی-ریمان تأیید کنید:

$$u = x^3 - 3xy^2 - 2x, \quad v = 3x^2y - y^3 - 2y$$

$$u_x = 3x^2 - 3y^2 = v_y, \quad u_y = -6xy = -v_x = -6xy$$

- مشتقات جزئی پیوسته هستند، که تحلیلی بودن در $\mathbb{C}$ را تأیید می‌کند. مشتق برابر است با:

$$f'(z) = 3z^2 - 2$$

(ب) تابع نمایی: $f(z) = e^z$ - بگذارید $f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$ ، پس $u = e^x \cos y$ ، $v = e^x \sin y$

$$u_x = e^x \cos y = v_y, \quad u_y = -e^x \sin y = -v_x$$

- مشتقات جزئی پیوسته هستند، بنابراین f سرتاسری است، با $f'(z) = e^z$.

(ج) تابع مثلثاتی: $f(z) = \sin z$ - از آنجا که $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ ، و e^{iz} ، e^{-iz} سرتاسری هستند، $\sin z$ سرتاسری است. تأیید:

$$u = \sin x \cosh y, \quad v = \cos x \sinh y$$

$$u_x = \cos x \cosh y = v_y, \quad u_y = \sin x \sinh y = -v_x$$

- مشتقات جزئی پیوسته تحلیلی بودن را تأیید می‌کنند، با $f'(z) = \cos z$.

(د) تابع گویا: $f(z) = \frac{z}{z-1}$ - تحلیلی در جایی که $z-1 \neq 0$ ، یعنی $z \neq 1$. محاسبه:

$$f'(z) = \frac{(z-1) \cdot 1 - z \cdot 1}{(z-1)^2} = -\frac{1}{(z-1)^2}$$

- بنابراین، f در $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ تحلیلی است.

(ه) تابع غیرتحلیلی: $f(z) = \bar{z}$ - بگذارید $u = x$ ، $v = -y$.

$$u_x = 1 \neq -1 = v_y, \quad u_y = 0 = -v_x$$

- معادلات کوشی-ریمان برقرار نیستند، بنابراین f در هیچ جا تحلیلی نیست.

(و) تابع لگاریتمی: $f(z) = \log z$ - برای شاخه اصلی $(-\pi < \arg z \leq \pi)$ ، $f(z) =$

$$\ln |z| + i \arg z \quad \text{در شکل قطبی، } u = \ln r, v = \theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 = -\frac{\partial v}{\partial r}$$

- تحلیلی در $\mathbb{C} \setminus \{z \mid z \leq 0\}$ ، با $f'(z) = \frac{1}{z}$.

۵.۱۴.۲ کاربردها و نتایج

توابع تحلیلی در تحلیل مختلط مرکزی هستند و کاربردهای گسترده‌ای دارند:

• نگاشت‌های همدیس: توابع تحلیلی با مشتقات غیرصفر، زوایا را حفظ می‌کنند، که در

دینامیک شاره‌ها برای مدل‌سازی جریان‌های بدون چرخش و در نقشه‌نگاری برای طرح‌های نقشه استفاده می‌شوند.

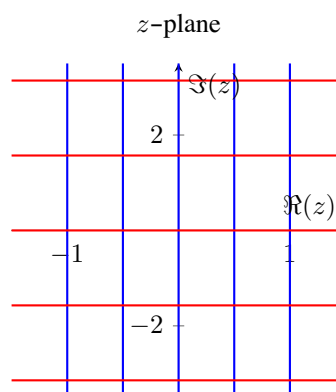
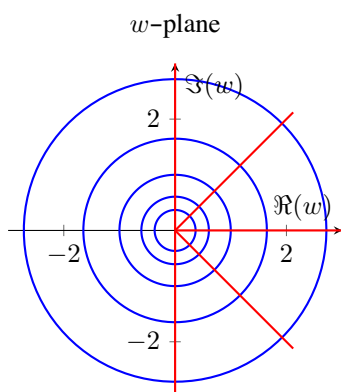
- تحلیل هارمونیک: ماهیت هارمونیک بخش‌های حقیقی و موهومی آنها در حل معادله لاپلاس در الکترواستاتیک و انتقال حرارت حیاتی است.
- انتگرال‌گیری مختلط: توابع تحلیلی، قضیه‌های قدرتمندی مانند قضیه انتگرال کوشی را ممکن می‌سازند، که انتگرال‌های کانتور را در فیزیک و مهندسی ساده می‌کند.
- پردازش سیگنال: در مهندسی، توابع تحلیلی، پایه تبدیل‌های فوریه و لاپلاس برای تحلیل سیگنال‌ها را تشکیل می‌دهند.

یک نتیجه کلیدی این است که توابع تحلیلی بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر هستند و دارای نمایش‌های سری توانی می‌باشند، که آنها را در مقایسه با توابع مشتق‌پذیر حقیقی، بسیار خوب رفتار می‌سازد.

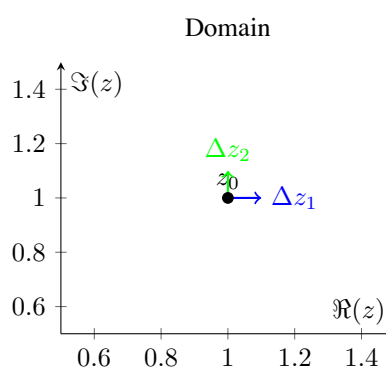
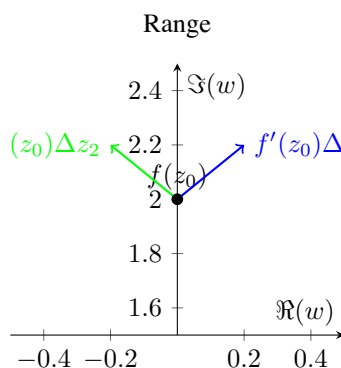
۶.۱۴.۲ زمینه تاریخی

نظریه توابع تحلیلی در قرن نوزدهم توسط آگوستین-لویی کوشی، که معادلات کوشی-ریمان و قضیه‌های انتگرال را بنا نهاد، و برنهارد ریمان، که کارش بر نظریه توابع و سطوح ریمان، خواص آنها را رسمی کرد، توسعه یافت. کارل وایرشراس با تأکید بر نمایش‌های سری توانی، درک مدرن از تحلیلی بودن را تثبیت کرد.

توابع تحلیلی را می‌توان به عنوان نگاشت‌های نرم در صفحه مختلط تجسم کرد، که زوایا را حفظ می‌کنند زمانی که $f'(z) \neq 0$. برای مثال، $f(z) = z^2$ یک شبکه از خطوط را به شبکه‌ای از سهمی‌ها نگاشت می‌کند، با مقیاس‌دهی محلی به اندازه $|f'(z)| = |2z|$ و چرخش به اندازه $\arg(2z)$. برای $f(z) = e^z$ ، خطوط عمودی به دایره‌ها و خطوط افقی به پرتوها نگاشت می‌شوند، که ماهیت دوره‌ای و همدیس تابع را منعکس می‌کند.



شکل ۴۲.۲: نگاشت خطوط شبکه تحت $f(z) = e^z$. چپ: صفحه z با خطوط عمودی (آبی) و افقی (قرمز). راست: صفحه w که در آن خطوط عمودی به دایره‌ها و خطوط افقی به شعاع‌ها نگاشت می‌شوند.



شکل ۴۳.۲: تبدیل محلی تحت $f(z) = z^2$ در $z_0 = 1 + i$. بردارهای عمود بر هم Δz_1 و Δz_2 در دامنه به بردارهای عمود بر هم در برد نگاشت می‌شوند، که زاویه $\theta = 90^\circ$ را حفظ می‌کند.

(آ) تأیید کنید که $f(z) = z^4 - 3z^2 + 2$ در $\mathbb{C}$ تحلیلی است.

• پاسخ: به عنوان یک چندجمله‌ای، در همه جا مشتق‌پذیر است، بنابراین سرتاسری است.

(ب) نشان دهید که $f(z) = \cos z$ در $\mathbb{C}$ تحلیلی است.

• پاسخ: از آنجا که $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ ، و e^{iz} ، e^{-iz} سرتاسری هستند، $\cos z$ سرتاسری است.

(ج) تعیین کنید که $f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$ در کجا تحلیلی است.

• پاسخ: تحلیلی در جایی که $z^2 + 1 \neq 0$ ، یعنی $z \neq \pm i$.

(د) بررسی کنید که آیا $f(z) = \operatorname{Re} z$ تحلیلی است.

• پاسخ: بگذارید $u = x$ ، $v = 0$. آنگاه $u_x = 1 \neq 0 = v_y$ ، بنابراین در هیچ جا تحلیلی نیست.

(ه) تأیید کنید که $f(z) = \sin z$ سرتاسری است با استفاده از معادلات کوشی-ریمان.

• پاسخ: بگذارید $u = \sin x \cosh y$ ، $v = \cos x \sinh y$.

$$u_x = \cos x \cosh y = v_y, \quad u_y = \sin x \sinh y = -v_x$$

مشتقات جزئی پیوسته هستند، بنابراین $\sin z$ سرتاسری است.

(و) تعیین کنید که شاخه اصلی $f(z) = \log z$ در کجا تحلیلی است.

۱۵.۲ توابع هارمونیک

• پاسخ: تحلیلی در $\mathbb{C} \setminus \{z \mid z \leq 0\}$.

۹.۱۴.۲ تمرین‌های دشوارتر

- (آ) ثابت کنید که اگر f در دامنه متصل D تحلیلی باشد و $f(z) = 0$ برای همه z در یک زیرمجموعه باز غیرخالی از D ، آنگاه $f(z) = 0$ برای همه $z \in D$.
- (ب) نشان دهید که اگر f در دامنه D تحلیلی و غیرثابت باشد، آنگاه $|f(z)|$ نمی‌تواند در D به بیشینه برسد.
- (ج) تمام توابع سرتاسری f را بیابید که $f(0) = 1$ و $f'(z) = f(z)$ برای همه $z \in \mathbb{C}$.
- (د) تعیین کنید که آیا $f(z) = z \operatorname{Re} z$ در جایی تحلیلی است.

۱۵.۲ توابع هارمونیک

۱.۱۵.۲ تعریف

تابع $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ ، که در آن $D \subseteq \mathbb{C}$ یک مجموعه باز است، هارمونیک نامیده می‌شود اگر دو بار پیوسته مشتق‌پذیر باشد و معادله لاپلاس را برآورده کند:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

که در آن $z = x + iy$. در تحلیل مختلط، توابع هارمونیک معمولاً بخش‌های حقیقی یا موهومی توابع تحلیلی هستند که روی دامنه‌های باز تعریف شده‌اند.

۱۵.۲ توابع هارمونیک

۲.۱۵.۲ رابطه با توابع تحلیلی

توابع هارمونیک ارتباط نزدیکی با توابع تحلیلی دارند. اگر $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ در مجموعه باز D تحلیلی باشد، آنگاه هر دو u و v در D هارمونیک هستند. این از معادلات کوشی-ریمان ناشی می‌شود:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

با مشتق‌گیری:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

از آنجا که $v_{yx} = v_{xy}$ (با فرض پیوستگی مشتقات مرتبه دوم)، داریم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = v_{yx} - v_{xy} = 0$$

به طور مشابه، v هارمونیک است. برعکس، برای یک تابع هارمونیک u در دامنه ساده متصل D ، مزدوج هارمونیک v وجود دارد به طوری که $f = u + iv$ تحلیلی است.

۳.۱۵.۲ خواص اصلی

توابع هارمونیک دارای چندین خاصیت کلیدی هستند که آنها را در تحلیل مختلط بنیادی می‌سازند:

(آ) خاصیت میانگین: برای تابع هارمونیک u ، مقدار در نقطه $z_0 \in D$ برابر میانگین مقادیر

آن روی هر دایره‌ای به مرکز z_0 در D است:

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta,$$

برای $r > 0$ به اندازه کافی کوچک.

(ب) اصل بیشینه: اگر u در دامنه محدود D هارمونیک باشد، مقادیر بیشینه و کمینه خود را روی مرز D می‌گیرد، مگر اینکه u ثابت باشد.

(ج) مشتق‌پذیری بی‌نهایت: توابع هارمونیک در دامنه خود بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر هستند، زیرا راه‌حل‌های معادله دیفرانسیل جزئی بیضوی هستند.

(د) یگانگی: مسئله دیریکله برای معادله لاپلاس دارای راه‌حل یکتا است: با توجه به مقادیر مرزی پیوسته روی ∂D ، حداکثر یک تابع هارمونیک در D وجود دارد که با آن مقادیر مطابقت دارد.

(ه) مزدوج هارمونیک: در دامنه ساده متصل، تابع هارمونیک u دارای مزدوج v است، به طوری که $f = u + iv$ تحلیلی است، که با حل معادلات کوشی-ریمان یافت می‌شود.

۴.۱۵.۲ یافتن مزدوج هارمونیک

برای یافتن مزدوج هارمونیک v یک تابع هارمونیک u ، معادلات زیر را حل کنید:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

انتگرال بگیرید:

$$v(x, y) = \int -\frac{\partial u}{\partial y} dx + h(y).$$

سپس، از $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$ برای تعیین $h(y)$ استفاده کنید. این تضمین می‌کند که $f = u + iv$ تحلیلی است.

۵.۱۵.۲ مثال‌های توضیحی

(آ) مثال چندجمله‌ای: تابع $u(x, y) = x^2 - y^2$ ، بخش حقیقی $f(z) = z^2$. تأیید هارمونیک بودن:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0$$

مزدوج هارمونیک: حل کنید:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -(-2y) = 2y, \quad v = 2xy + h(y)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x + h'(y) = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x \implies h'(y) = 0 \implies h(y) = c$$

بنابراین، $v = 2xy$ و $f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + i2xy$.

(ب) مثال نمایی: بگذارید $u(x, y) = e^x \cos y$ ، از $f(z) = e^z$. تأیید:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x \cos y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^x \cos y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^x \cos y - e^x \cos y = 0$$

مزدوج هارمونیک: $v = e^x \sin y$ ، زیرا $f(z) = e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$

(ج) مثال لگاریتمی: بگذارید $u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ برای $(x, y) \neq (0, 0)$. تأیید:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{y^2 - x^2 + x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

مزدوج هارمونیک: $v = \tan^{-1}(y/x)$ ، از $f(z) = \log z$

(د) مثال غیرهارمونیک: بگذارید $u(x, y) = x^2 + y^2$. تأیید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4 \neq 0$$

غیرهارمونیک، زیرا معادله لاپلاس را برآورده نمی‌کند.

۱۵.۲ توابع هارمونیک

۶.۱۵.۲ کاربردها و نتایج

توابع هارمونیک در تحلیل مختلط و کاربردهای آن نقش محوری دارند:

- الکترواستاتیک: پتانسیل الکتریکی در مناطق بدون بار، هارمونیک است و معادله لاپلاس را برآورده می‌کند.
- دینامیک شاره‌ها: پتانسیل سرعت برای جریان سیال بدون چرخش و غیرقابل تراکم، هارمونیک است، که در آیرودینامیک استفاده می‌شود.
- انتقال حرارت: توزیع دمای حالت پایدار در رسانه‌های بدون منبع حرارتی، هارمونیک است.
- پردازش سیگنال: توابع هارمونیک، تحلیل فوری را برای تجزیه سیگنال‌ها پشتیبانی می‌کنند.
- نگاشت‌های هم‌دیس: به عنوان اجزای توابع تحلیلی، در تبدیل‌های هندسی در مهندسی و فیزیک نقش دارند.

یک نتیجه کلیدی این است که توابع هارمونیک در دامنه‌های ساده متصل دارای مزدوج‌های هارمونیک هستند، که ساخت توابع تحلیلی را برای کاربردهای تحلیل مختلط تسهیل می‌کند.

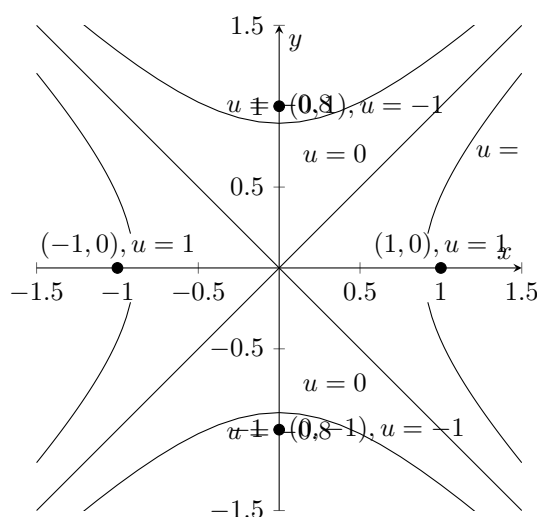
۷.۱۵.۲ زمینه تاریخی

توابع هارمونیک در قرن هجدهم توسط پیر-سیمون لاپلاس، که معادله لاپلاس را در زمینه میدان‌های گرانشی معرفی کرد، رسمی شدند. اصطلاح ”هارمونیک” توسط ویلیام تامسون (لرد کلونین) در قرن

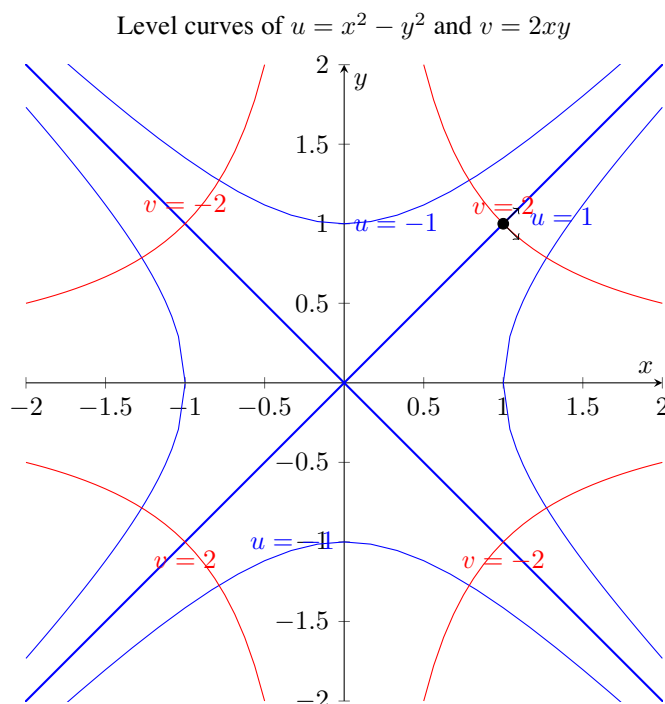
نوزدهم ابداع شد، با الهام از هارمونی‌های موجی. ارتباط آنها با تحلیل مختلط توسط کوشی و ریمن، که نشان دادند بخش‌های حقیقی و موهومی توابع تحلیلی هارمونیک هستند، تثبیت شد.

۸.۱۵.۲ شهود

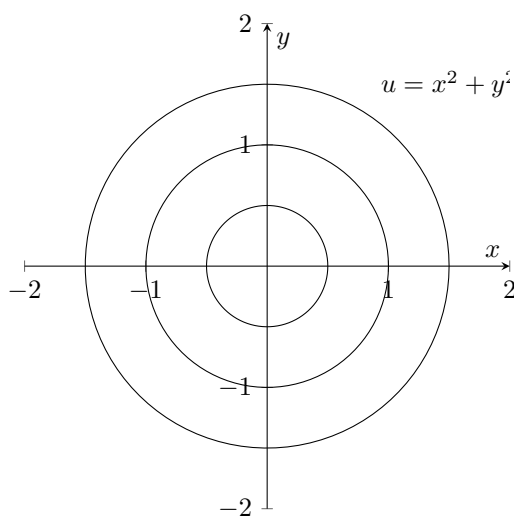
توابع هارمونیک را می‌توان به عنوان سطوح نرمی تجسم کرد که پدیده‌های حالت پایدار، مانند دما یا پتانسیل، را نشان می‌دهند، جایی که مقدار در هر نقطه میانگین مقادیر اطراف آن است. برای $u(x, y) = x^2 - y^2$ ، منحنی‌های تراز به صورت هذلولی هستند، که عمود بر منحنی‌های مزدوج $v = 2xy$ قرار دارند، و ماهیت همدیس تابع تحلیلی $f(z) = z^2$ را نشان می‌دهند. این عمود بودن، تعادل ذاتی معادله لاپلاس را منعکس می‌کند و انتقال‌های نرم در صفحه مختلط را تضمین می‌کند.



شکل ۴۴.۲: منحنای هم‌تراز تابع هارمونیک $u(x, y) = x^2 - y^2$ در $[-1, 1]^2$. بیشینه مقدار $u = 1$ در نقاط $(\pm 1, 0)$ و کمینه مقدار $u = -1$ در نقاط $(0, \pm 1)$ روی مرز رخ می‌دهد.



شکل ۴۵.۲: منحنای هم‌تراز تابع هارمونیک $u(x, y) = x^2 - y^2$ (آبی) و مزدوج هارمونیک آن $v(x, y) = 2xy$ (قرمز). منحنای با زاویه قائمه تقاطع می‌کنند، همان‌طور که با زاویه $\theta = 90^\circ$ در $(1, 1)$ نشان داده شده است، که معادلات کوشی-ریمان را منعکس می‌کند.



شکل ۴۶.۲: منحنای هم‌تراز تابع غیرهارمونیک $u(x, y) = x^2 + y^2$ که دایره‌هایی هستند. از آنجا که $\nabla^2 u = 4 \neq 0$ ، این تابع معادله لاپلاس را برآورده نمی‌کند.

(آ) تأیید کنید که $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ هارمونیک است.

• پاسخ: محاسبه کنید:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0$$

بنابراین، u هارمونیک است.

(ب) مزدوج هارمونیک $u(x, y) = e^x \sin y$ را بیابید.

• پاسخ: حل کنید:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \cos y$$

$$v = -e^x \cos y + h(y)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = e^x \sin y + h'(y) = \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \sin y \implies h'(y) = 0 \implies h(y) = c$$

بنابراین، $v = -e^x \cos y + c$. معمولاً $c = 0$ ، پس $v = -e^x \cos y$.

(ج) نشان دهید که $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ برای $(x, y) \neq (0, 0)$ هارمونیک است.

• پاسخ: محاسبه کنید:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2x^3 - 6xy^2}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2xy^2 - 6x^3}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x^3 - 6xy^2 + 2xy^2 - 6x^3}{(x^2 + y^2)^3} = 0$$

بنابراین، u هارمونیک است.

(د) تأیید کنید که $u(x, y) = x^2 + y^2$ هارمونیک نیست.

• پاسخ: محاسبه کنید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4 \neq 0$$

غیرهارمونیک است.

۱۰.۱۵.۲ تمرین‌های دشوارتر

(آ) معادله لاپلاس را در دیسک واحد با شرط مرزی $u(1, \theta) = \cos \theta$ حل کنید.

(ب) تابعی هارمونیک در نیم صفحه بالایی بیابید که با $y \rightarrow \infty$ به صفر نزدیک شود و روی محور حقیقی مثبت مقدار ۱ و روی محور حقیقی منفی مقدار ۰ بگیرد.

(ج) با استفاده از فرمول انتگرال پواسون، تابع هارمونیک در دیسک واحد با مقادیر مرزی $u(1, \theta) = \sin^2 \theta$ را بیابید.

۱۶.۲ توابع تحلیلی یکتا تعیین شده

۱۶.۲ توابع تحلیلی یکتا تعیین شده

۱.۱۶.۲ تعریف

تابع تحلیلی f روی دامنه $D \subseteq \mathbb{C}$ یکتا تعیین شده است اگر مقادیر آن روی زیرمجموعه‌ای $E \subset D$ با خواص خاص، f را به طور کامل در D تعیین کند. به طور خاص، اگر E دارای نقطه حدی در D باشد، یعنی نقطه‌ای $z_0 \in D$ وجود داشته باشد که هر همسایگی از z_0 شامل بی‌نهایت نقاط از E باشد، آنگاه f توسط مقادیرش روی E یکتا تعیین می‌شود. این خاصیت، سختی توابع تحلیلی را برجسته می‌کند و آنها را از توابع حقیقی متمایز می‌کند، که ممکن است چنین یگانگی‌ای نداشته باشند.

۲.۱۶.۲ خواص اصلی

مفهوم توابع تحلیلی یکتا تعیین شده توسط نتایج کلیدی زیر، همان‌طور که در منابع ذکر شده است، اداره می‌شود:

(آ) لم: اگر تابع f در دامنه D تحلیلی باشد و $f(z) = 0$ در هر نقطه z از یک دامنه یا قطعه خطی در D باشد، آنگاه $f(z) = 0$ در سراسر D .

(ب) قضیه هویت: فرض کنید f و g توابع تحلیلی روی دامنه D باشند. اگر مجموعه‌ای $E \subset D$ با نقطه حدی در D وجود داشته باشد به طوری که $f(z) = g(z)$ برای همه $z \in E$ ، آنگاه $f(z) = g(z)$ برای همه $z \in D$.

(ج) نتیجه: اگر تابع تحلیلی f روی D در مجموعه‌ای $E \subset D$ با نقطه حدی در D صفر باشد،

۱۶.۲ توابع تحلیلی یکتا تعیین شده

آنگاه $f(z) = 0$ برای همه $z \in D$.

این خواص، سختی توابع تحلیلی را نشان می‌دهند: رفتار آنها روی مجموعه‌ای کوچک با نقطه حدی، رفتارشان را در کل دامنه تعیین می‌کند. این نتیجه از نمایش سری توانی آنها ناشی می‌شود، که یگانگی را تضمین می‌کند.

۳.۱۶.۲ اشتقاق قضیه هویت

برای درک قضیه هویت، دو تابع تحلیلی f و g روی دامنه D را در نظر بگیرید که روی مجموعه $E \subset D$ با نقطه حدی $z_0 \in D$ برابرند. از آنجا که f و g تحلیلی هستند، آنها دارای بسط سری تیلور حول z_0 هستند:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$$

برای z در دیسکی متمرکز در z_0 . تابع $h(z) = f(z) - g(z)$ را تعریف کنید، که تحلیلی است و روی E صفر است. از آنجا که z_0 نقطه حدی E است، دنباله‌ای $\{z_n\} \subset E$ وجود دارد که $z_n \rightarrow z_0$ ، با $h(z_n) = 0$. سری توانی برای $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n)(z - z_0)^n$ باید در نقاط بی‌نهایت که به z_0 همگرا می‌شوند، صفر شود، که دلالت دارد تمام ضرایب صفرند. بنابراین، $h(z) = 0$ در دیسک، و از آنجا که D متصل است، $h(z) = 0$ در سراسر D ، پس $f = g$.

(آ) مثال ۱: توابع مثلثاتی دو تابع سرتاسری $f(z) = \sin z$ و $g(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ را در نظر بگیرید. آنها روی خط حقیقی برابرند، یعنی $f(x) = g(x)$ برای همه $x \in \mathbb{R}$. از آنجا که خط حقیقی دارای نقاط حدی در $\mathbb{C}$ است، قضیه هویت دلالت دارد که $f(z) = g(z)$ برای همه $z \in \mathbb{C}$.

(ب) مثال ۲: دنباله با نقطه حدی فرض کنید $f(z)$ روی دامنه D شامل مبدأ تحلیلی باشد، با $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ برای $n = 1, 2, 3, \dots$. دنباله $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ دارای نقطه حدی در 0 در D است. طبق نتیجه، $f(z) = 0$ برای همه $z \in D$.

(ج) مثال ۳: زیرمجموعه باز اگر دو تابع تحلیلی f و g روی دامنه متصل D در زیرمجموعه باز $U \subset D$ ، مانند دیسک، برابر باشند، آنگاه در کل D برابرند. از آنجا که U باز است، شامل نقاط حدی در D است، بنابراین قضیه هویت تضمین می‌کند که $f = g$.

(د) مثال ۴: قطعه خطی فرض کنید f روی دامنه D شامل بازه $[0, 1]$ روی محور حقیقی تحلیلی باشد، و $f(x) = 0$ برای همه $x \in [0, 1]$. از آنجا که $[0, 1]$ دارای نقاط حدی در D است، لم دلالت دارد که $f(z) = 0$ برای همه $z \in D$.

(ه) مثال ۵: توافق چندجمله‌ای فرض کنید $f(z) = z^2$ و $g(z) = z^2 + (z-1)(z-2)$. اگر آنها روی $\{1, 2\}$ برابر باشند، و ما دیسکی شامل ۱ و ۲ را در نظر بگیریم، $\sin z$ ۲. اگر آنها روی $\{1, 2\}$ برابر باشند، و ما دیسکی شامل ۱ و ۲ را در نظر بگیریم، مجموعه ممکن است نقطه حدی نداشته باشد مگر اینکه گسترش یابد. اما اگر روی دنباله‌ای مانند $\left\{1 + \frac{1}{n}\right\}$ که به ۱ همگرا می‌شود، برابر باشند، آنگاه $f = g$ در دیسک.

۱۶.۲ توابع تحلیلی یکتا تعیین شده

۵.۱۶.۲ کاربردها و نتایج

قضیه هویت و خواص مرتبط، کاربردهای مهمی دارند:

- **ادامه تحلیلی:** اگر دو تابع تحلیلی تعریف شده در دامنه‌های مختلف روی تقاطع‌شان برابر باشند، و تقاطع دارای نقطه حدی باشد، آنها یک تابع واحد را در اتحاد دامنه‌هایشان تشکیل می‌دهند. این برای گسترش توابعی مانند تابع زتای ریمان حیاتی است.

- **یگانگی راه‌حل‌ها:** قضیه تضمین می‌کند که راه‌حل‌های معادلات دیفرانسیل یا معادلات تابعی، اگر تحلیلی باشند، یکتا هستند. برای مثال، تابع تحلیلی که $f'(z) = f(z)$ و $f(0) = 1$ را برآورده کند، باید $f(z) = e^z$ باشد.

- **درون‌یابی:** توابع تحلیلی می‌توانند توسط مقادیرشان روی دنباله‌ای با نقطه حدی یکتا تعیین شوند، که درون‌یابی چندجمله‌ای را به سری‌های بی‌نهایت گسترش می‌دهد.

یک نتیجه کلیدی این است که مجموعه صفرهای یک تابع تحلیلی غیرصفر نمی‌تواند نقطه حدی در دامنه‌اش داشته باشد، مگر اینکه تابع به طور یکسان صفر باشد، که سختی توابع تحلیلی را تقویت می‌کند.

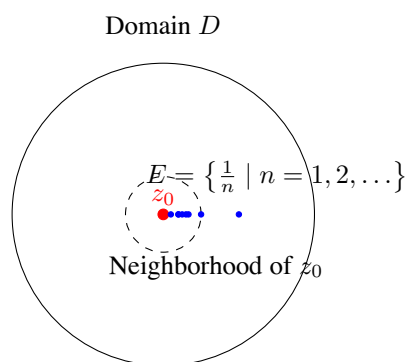
۶.۱۶.۲ زمینه تاریخی

خواص یگانگی توابع تحلیلی در قرن نوزدهم توسط آگوستین-لویی کوشی، که پایه‌های تحلیل مختلط را بنا نهاد، و کارل وایرشراس، که بر نمایش‌های سری توانی تأکید کرد، رسمی شد. کارهای برنهارد ریمان بر نظریه توابع، نقش قضیه هویت را در ادامه تحلیلی تثبیت کرد و آن را به سنگ بنای تحلیل مختلط مدرن تبدیل کرد.

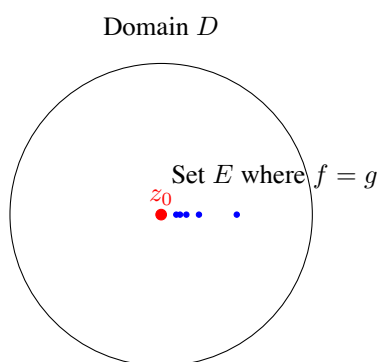
۱۶.۲ توابع تحلیلی یکتا تعیین شده

۷.۱۶.۲ شهود

صفحه مختلط را به عنوان بومی تصور کنید که تابع تحلیلی $f(z)$ روی آن نقاشی می‌کند. اگر f و تابع تحلیلی دیگر g روی مجموعه‌ای مانند نقاط $\frac{1}{n}$ که به 0 همگرا می‌شود، برابر باشند، قضیه هویت تضمین می‌کند که نقاشی‌های آنها در کل دامنه یکسان است. برای مثال، اگر $f(z) = z^2$ و $g(z) = z^2$ روی $\{\frac{1}{n}\}$ برابر باشند، سری‌های تیلور آنها در 0 یکسان است، که رفتارشان را در همه جا ثابت می‌کند. این سختی در مقابل توابع پیوسته، که انعطاف‌پذیرتر هستند، قرار می‌گیرد.



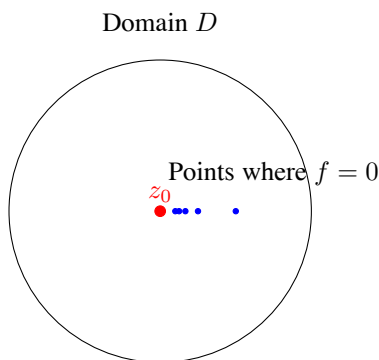
شکل ۴۷.۲: ناحیه D (دیسک واحد) با مجموعه E (نقاط آبی) که دارای یک نقطه حدی z_0 (قرمز) در داخل D است. دایره نقطه‌چین نشان‌دهنده همسایگی z_0 است که شامل تعداد نامتناهی نقاط از E می‌باشد.



Thus, $f = g$ on all of D

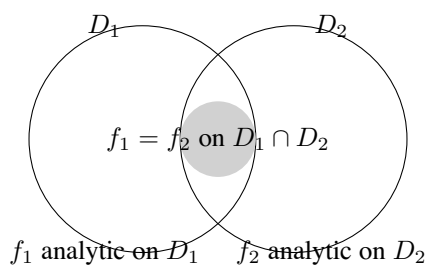
شکل ۴۸.۲: نمایش قضیه همانی: اگر دو تابع تحلیلی f و g در مجموعه E (نقاط آبی) با یک نقطه حدی z_0 (قرمز) در D ، مانند $f(z) = z^2$ و $g(z) = z^2$ در $\{\frac{1}{n}\}$ ، یکسان باشند، در کل D یکسان هستند.

۱۶.۲ توابع تحلیلی یکتا تعیین شده



Thus, $f \equiv 0$ on D

شکل ۴۹.۲: نتیجه: اگر یک تابع تحلیلی f در مجموعه E (نقاط آبی) با یک نقطه حدی z_0 (قرمز) در D صفر باشد، در کل D به صورت یکسان صفر است.



Unique extension to $D_1 \cup D_2$

شکل ۵۰.۲: ادامه تحلیلی: اگر f_1 و f_2 به ترتیب در D_1 و D_2 تحلیلی باشند و در اشتراک $D_1 \cap D_2$ ، که دارای یک نقطه حدی است، یکسان باشند، می توان آن ها را به صورت یکتا به یک تابع تحلیلی در $D_1 \cup D_2$ گسترش داد.

(آ) تأیید کنید که اگر f روی دامنه D تحلیلی باشد، و $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ برای $n = 1, 2, 3, \dots$ ، با 0 در D ، آنگاه $f(z) = 0$ برای همه $z \in D$.

• پاسخ: دنباله $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ دارای نقطه حدی در 0 در D است. طبق نتیجه قضیه هویت، از آنجا که $f(z_n) = 0$ ، $f(z) = 0$ برای همه $z \in D$.

(ب) فرض کنید f و g روی دامنه متصل D تحلیلی باشند، با $f(z) = g(z)$ روی دیسک باز $U \subset D$. ثابت کنید $f = g$ در D .

• پاسخ: از آنجا که U باز است، شامل نقطه حدی در D است. طبق قضیه هویت، $f(z) = g(z)$ برای همه $z \in D$.

(ج) فرض کنید f روی دیسک واحد $|z| < 1$ تحلیلی باشد، و $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$ برای $n = 1, 2, 3, \dots$. نشان دهید که $f(z) = z^2$.

• پاسخ: بگذارید $g(z) = f(z) - z^2$. آنگاه $g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} - \left(\frac{1}{n}\right)^2 = 0$. از آنجا که $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ دارای نقطه حدی در 0 است، قضیه هویت دلالت دارد که $g(z) = 0$ ، پس $f(z) = z^2$.

(د) فرض کنید f روی دامنه D شامل $[0, 1]$ تحلیلی باشد، با $f(x) = 0$ برای $x \in [0, 1]$. نشان دهید که $f(z) = 0$ برای همه $z \in D$.

• پاسخ: بازه $[0, 1]$ دارای نقاط حدی در D است. طبق لم، $f(z) = 0$ برای همه $z \in D$.

۹.۱۶.۲ تمرین‌های دشوارتر

(آ) فرض کنید f روی دامنه D تحلیلی باشد، و قطعه خطی $L \subset D$ وجود داشته باشد به طوری که $f(z) = c$ برای همه $z \in L$ ، که c ثابت است. نشان دهید که $f(z) = c$ برای همه $z \in D$.

(ب) فرض کنید f روی دامنه D تحلیلی باشد، و دنباله‌ای $\{z_n\}$ در D بدون نقطه حدی در D وجود داشته باشد، اما $f(z_n) = 0$ برای همه n . بحث کنید که آیا f باید به طور یکسان صفر باشد.

(ج) توضیح دهید که چگونه قضیه هویت، یگانگی ادامه تحلیلی را تضمین می‌کند، با مثالی شامل تابع زتای ریمان.

۱۷.۲ اصل انعکاس

۱.۱۷.۲ تعریف

اصل انعکاس، که به عنوان اصل انعکاس شوارتز نیز شناخته می‌شود، بیان می‌کند که اگر تابعی f در دامنه D که شامل قطعه S از محور حقیقی است، تحلیلی باشد، بر $D \cup S$ پیوسته باشد، و بر S مقادیر حقیقی داشته باشد، آنگاه می‌توان آن را به دامنه $D^* = \{\bar{z} \mid z \in D\}$ ، که انعکاس D

نسبت به محور حقیقی است، گسترش داد. گسترش به صورت تابع زیر تعریف می‌شود:

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{اگر } z \in D \cup S, \\ \overline{f(\bar{z})} & \text{اگر } z \in D^*. \end{cases}$$

این تابع گسترش یافته F در دامنه بزرگتر $D \cup S \cup D^*$ تحلیلی است. معمولاً، D زیرمجموعه‌ای از نیم صفحه بالایی ($\Im z > 0$) است، و D^* انعکاس آن در نیم صفحه پایینی ($\Im z < 0$) است.

۲.۱۷.۲ خواص اصلی

خواص زیر اصل انعکاس را مشخص می‌کنند:

(آ) گسترش تحلیلی: تابع گسترش یافته F تحلیلی بودن تابع اصلی f را حفظ می‌کند، به این

معنا که F در دامنه ترکیبی $D \cup S \cup D^*$ تحلیلی است. این با استفاده از قضیه موررا ثابت می‌شود، که تأیید می‌کند انتگرال F بر هر کانتور بسته در $D \cup S \cup D^*$ صفر است، که مشتق پذیری و نرمی را تضمین می‌کند.

(ب) پیوستگی در سراسر مرز: گسترش F در سراسر محور حقیقی (مرز S) پیوسته است، به دلیل پیوستگی f بر $D \cup S$ و ماهیت حقیقی مقدار بودن آن بر S . این امر انتقال یکپارچه‌ای بین دامنه اصلی و انعکاس آن را تضمین می‌کند.

(ج) خاصیت تقارن: اصل انعکاس از یک شرط تقارن استفاده می‌کند: برای $z \in D^*$ ، $F(z) = \overline{f(\bar{z})}$. به طور کلی، تابع گسترش یافته دارای خاصیت $F(\bar{z}) = \overline{F(z)}$ است، که تقارن نسبت به محور حقیقی را نشان می‌دهد.

- (د) تعمیم به مرزهای دیگر: اصل محدود به محور حقیقی نیست بلکه می‌تواند به مرزهای دیگر، مانند دایره‌ها، تعمیم یابد. برای مثال، اگر تابعی مقادیر خاصی (مثلاً بر دایره واحد) داشته باشد، می‌توان آن را از طریق آن مرز انعکاس داد در حالی که تحلیلی بودن حفظ شود.
- (ه) یکتایی و تحلیلی بودن گسترش: یک نتیجه فرعی کلیدی این است که گسترش تابع یکتا است و در دامنه گسترش یافته تحلیلی باقی می‌ماند، که سازگاری و قابلیت اطمینان در کاربردها را فراهم می‌کند.

۳.۱۷.۲ اشتقاق اصل

اشتقاق اصل انعکاس با استفاده از قضیه موررا انجام می‌شود، که بیان می‌کند اگر تابعی پیوسته باشد و انتگرال آن بر هر کانتور بسته صفر باشد، آنگاه تابع تحلیلی است. برای تابع F :

$$\bullet \text{ برای کانتورهای کاملاً در } D: \int_{\gamma} F(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

$$\bullet \text{ برای کانتورهای کاملاً در } D^*: \int_{\gamma} \overline{f(\bar{z})} dz = -\int_{\bar{\gamma}} \overline{f(w)} dw = 0, \text{ با تغییر متغیر } w = \bar{z}.$$

• برای کانتورهای متقاطع با S : با توجه به پیوستگی f و خاصیت حقیقی مقدار بودن آن، انتگرال صفر است.

بنابراین، F در $D \cup S \cup D^*$ تحلیلی است.

(آ) تابع چندجمله‌ای: $f(z) = z^2$ - توضیح: تابع $f(z) = z^2$ سرتاسری است. بر محور حقیقی، که در آن $z = x$ (عدد حقیقی)، $f(x) = x^2$ است، که حقیقی است. اصل انعکاس تأیید می‌کند که تابع شرط انعکاس را برآورده می‌کند. - تأیید:

$$f(\bar{z}) = (\bar{z})^2$$

از آنجا که $\bar{z}^2 = \overline{z^2}$ ، و برای هر z مختلط، $\overline{f(z)} = \bar{z}^2$ داریم:

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)}.$$

این سازگاری به این معناست که گسترش در سراسر محور حقیقی یکپارچه است، و از آنجا که $f(z)$ سرتاسری است، اصل انعکاس به طور طبیعی برقرار است.

(ب) تابع نمایی: $f(z) = e^{-z^2}$ - توضیح: تابع $f(z) = e^{-z^2}$ نیز سرتاسری است. بر محور حقیقی، که در آن $z = x$ ، $f(x) = e^{-x^2}$ است، که حقیقی و مثبت است. - تأیید:

$$F(z) = \overline{f(\bar{z})} = \overline{e^{-(\bar{z})^2}}.$$

از آنجا که $(\bar{z})^2 = \overline{z^2}$ ، داریم:

$$\overline{e^{-(\bar{z})^2}} = \overline{e^{-\overline{z^2}}} = e^{-z^2},$$

که با $f(z) = e^{-z^2}$ مطابقت دارد. بنابراین، تابع گسترش یافته همان تابع اصلی است.

(ج) تابع گویا: $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$ - توضیح: این تابع در صفحه مختلط به جز در نقاط $z = i$

و $z = -i$ تحلیلی است. بر محور حقیقی، که در آن $z = x$ ، $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ است، که حقیقی است. - تأیید: خاصیت $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ با محاسبه برقرار است، که گسترش تحلیلی را تضمین می‌کند.

(د) تابع تعریف شده در نیم‌صفحه بالایی: $f(z)$ با $f(x) = x^3$ بر محور حقیقی - توضیح: فرض کنید $f(z)$ در نیم‌صفحه بالایی ($\Im z > 0$) تحلیلی، تا محور حقیقی پیوسته، و بر محور حقیقی $f(x) = x^3$ برای x حقیقی باشد. از آنجا که $g(z) = z^3$ سرتاسری است و با $f(x) = x^3$ روی محور حقیقی مطابقت دارد، اصل انعکاس $f(z)$ را به نیم‌صفحه پایینی گسترش می‌دهد. - تأیید: برای z در نیم‌صفحه پایینی ($\Im z < 0$)، تابع گسترش یافته:

$$F(z) = \overline{f(\bar{z})} = \overline{(\bar{z})^3} = z^3,$$

که با $f(z) = z^3$ در کل صفحه مختلط سازگار است.

۵.۱۷.۲ کاربردها و نتایج فرعی

- ادامه تحلیلی: این اصل امکان گسترش دامنه توابع تحلیلی، مانند تابع زتای ریمان، را فراهم می‌کند.
- مسائل مقدار مرزی: در فیزیک، برای حل مسائلی مانند الکترواستاتیک و دینامیک شاردها استفاده می‌شود.
- تقارن در توابع: رفتار متقارن توابع را در سیستم‌هایی با مرزهای انعکاسی مدل‌سازی می‌کند.
- نگاشت‌های همدیس: در ساخت نگاشت‌هایی که زوایا را حفظ می‌کنند، کمک می‌کند.

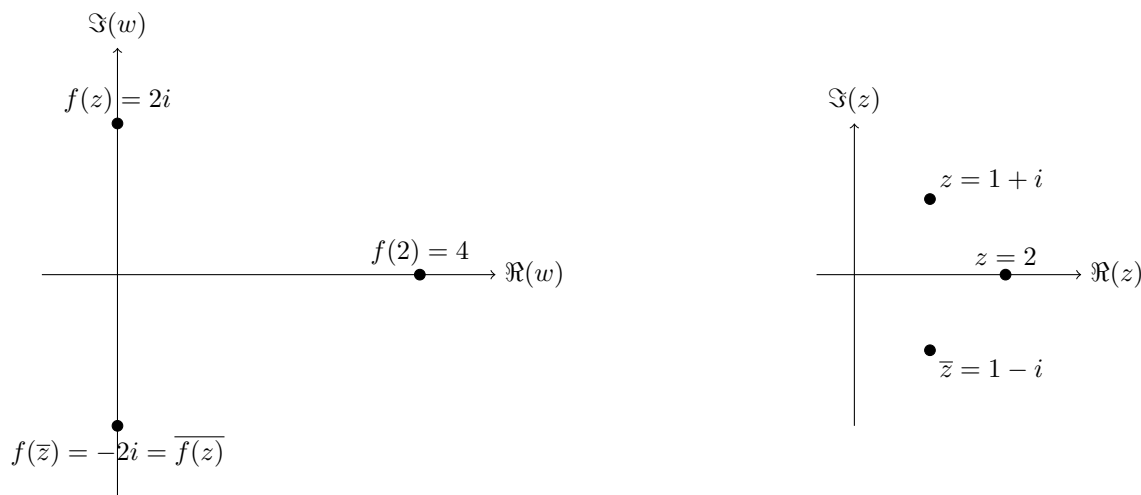
• نتیجه فرعی: گسترش تابع یکتا و تحلیلی است.

۶.۱۷.۲ زمینه تاریخی

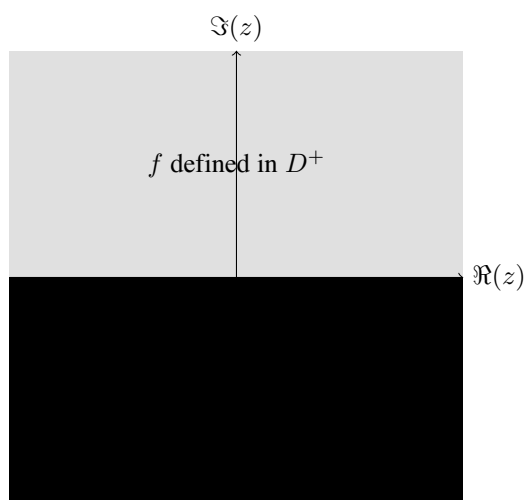
اصل انعکاس توسط هرمان شوارتز در قرن نوزدهم توسعه یافت، بر اساس مشارکت‌های بنیادی آگوستین-لویی کوشی و برنهارد ریمان. شوارتز گسترش توابع تحلیلی را در سراسر مرزهای متقارن رسمی کرد، و کار او به سنگ بنای تحلیل مختلط تبدیل شد.

۷.۱۷.۲ شهود

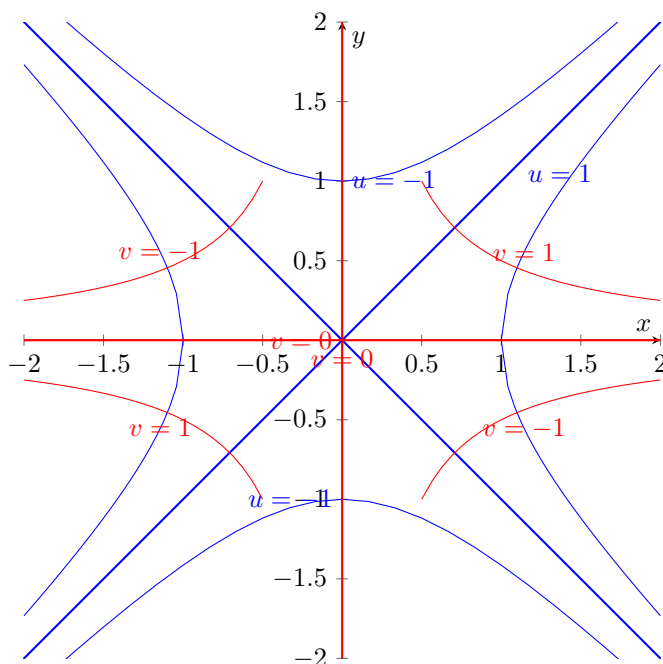
اصل انعکاس را می‌توان به عنوان آینه‌ای در سراسر محور حقیقی در صفحه مختلط تجسم کرد. برای نقطه $z = x + iy$ در نیم‌صفحه بالایی ($y > 0$)، انعکاس آن $\bar{z} = x - iy$ در نیم‌صفحه پایینی است. اگر $f(z) = u + iv$ تحلیلی و بر محور حقیقی حقیقی باشد ($v = 0$)، تابع گسترش یافته $F(\bar{z}) = \overline{f(z)} = u - iv$ یک نگاشت متقارن و نرم ایجاد می‌کند. برای مثال، برای $f(z) = z^2$ ، منحنی‌های تراز بخش حقیقی $x^2 - y^2$ در نیم‌صفحه بالایی در سراسر محور حقیقی انعکاس می‌یابند، و تحلیلی بودن را حفظ می‌کنند.



شکل ۵۱.۲: نمایش اصل بازتاب شوارتز برای $f(z) = z^2$. در صفحه z (چپ)، نقاط z ، $\bar{z}$ ، و یک نقطه روی محور حقیقی نشان داده شده‌اند. در صفحه w (راست)، تصاویر آنها تحت f رابطه $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ را برآورده می‌کنند، و روی محور حقیقی، $f(z)$ حقیقی است.



شکل ۵۲.۲: ادامه تحلیلی از طریق اصل بازتاب شوارتز. تابع f در ابتدا در نیم‌صفحه بالایی D^+ تعریف شده و با استفاده از $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$ به نیم‌صفحه پایینی D^- گسترش می‌یابد.



شکل ۵۳.۲: منحنای هم‌تراز $u = \operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2$ (آبی) و $v = \operatorname{Im}(z^2) = 2xy$ (قرمز) برای $f(z) = z^2$ ، متقارن نسبت به محور حقیقی، که اصل بازتاب شوارتز را نشان می‌دهد.

۸.۱۷.۲ تمرین‌ها

(آ) تأیید کنید که $f(z) = z^2$ برابری $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ را برآورده می‌کند.

• پاسخ: $f(\bar{z}) = (\bar{z})^2 = \overline{z^2} = \overline{f(z)}$.

(ب) فرض کنید f در $\{\Im z > 0\}$ تحلیلی، بر $\{\Im z \geq 0\}$ پیوسته، با $f(x) = x^3$ برای x حقیقی. از اصل انعکاس برای یافتن $f(z)$ برای $\Im z < 0$ استفاده کنید.

• پاسخ: $F(z) = \overline{f(\bar{z})} = z^3$.

(ج) نشان دهید که $f(z) = e^{-z^2}$ اصل انعکاس را برآورده می‌کند.

• پاسخ: $F(z) = \overline{e^{-(\bar{z})^2}} = e^{-z^2} = f(z)$.

(د) بگذارید $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$. تأیید کنید که در جایی که تعریف شده، اصل انعکاس را برآورده می‌کند.

• پاسخ: $f(\bar{z}) = \frac{\bar{z}}{\bar{z}^2+1} = \overline{\frac{z}{z^2+1}} = \overline{f(z)}$

۹.۱۷.۲ تمرین‌های دشوارتر

(آ) بگذارید f در $\{z \mid |z| < 1, \Im z > 0\}$ تحلیلی، تا $[-1, 1]$ پیوسته، با $f(x) = x$ برای $-1 < x < 1$. از اصل انعکاس برای گسترش f به $\{z \mid |z| < 1, \Im z < 0\}$ استفاده کنید.

(ب) فرض کنید f در دامنه‌ای متقارن نسبت به محور موهومی تحلیلی، تا محور موهومی پیوسته، و بر آن مقادیر موهومی بگیرد. یک اصل انعکاس برای این مورد فرموله کنید.

(ج) بگذارید f در $\{\Im z > 0\}$ تحلیلی، تا محور حقیقی پیوسته، با $f(x) = \sin x$. گسترش به نیم صفحه پایینی را بحث کنید.

فصل ۳

توابع اولیه

۱.۳ تابع نمایی

۱.۱.۳ تعریف

تابع نمایی برای یک متغیر مختلط $z = x + iy$ ، که در آن x و y اعداد حقیقی هستند، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y),$$

که در آن $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ فرمول اوایلر است، با y بر حسب رادیان. این تعریف، تابع نمایی حقیقی را به صفحه مختلط گسترش می‌دهد و هم اندازه و هم رفتار نوسانی را در بر می‌گیرد.

۱.۳ تابع نمایی

۲.۱.۳ ویژگی‌ها

تابع نمایی دارای چندین ویژگی اساسی است که هر یک برای کاربرد آن در تحلیل مختلط حیاتی است:

(آ) خاصیت جمعی: برای هر دو عدد مختلط $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

این از قواعد توان و فرمول اویلر پیروی می‌کند و سازگاری با نمایی‌های حقیقی را تضمین می‌کند.

(ب) مشتق: این تابع کلی است، به این معنی که در همه جای صفحه مختلط قابل مشتق‌گیری است، با:

$$\frac{d}{dz}e^z = e^z.$$

این ویژگی، ماهیت تحلیلی آن را تأکید می‌کند.

(ج) غیر صفر: تابع نمایی هرگز صفر نمی‌شود:

$$e^z \neq 0 \quad \text{همه } z \in \mathbb{C},$$

$$\text{زیرا } e^x > 0 \text{ و } |\cos y + i \sin y| = 1.$$

(د) تناوب: این تابع دوره‌ای است با دوره $2\pi i$:

$$e^{z+2\pi i} = e^z,$$

به دلیل تناوب $\sin y$ و $\cos y$.

(ه) قدر مطلق و آرگمان: قدر مطلق برابر است با:

$$|e^z| = e^x,$$

و آرگمان برابر است با:

$$\arg(e^z) = y + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

۳.۱.۳ مثال‌های گویا

برای روشن کردن رفتار تابع، مثال‌های زیر را در نظر بگیرید:

(آ) محاسبه $e^{i\pi}$:

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + i \cdot 0 = -1.$$

این، ارتباط بین توابع نمایی و توابع مثلثاتی را نشان می‌دهد.

(ب) حل $e^z = 1 + i$: بگذارید $z = x + iy$. آنگاه:

$$e^x(\cos y + i \sin y) = 1 + i.$$

با برابر قرار دادن قدر مطلق‌ها: $e^x = |1 + i| = \sqrt{2}$ ، بنابراین $x = \ln \sqrt{2} = \frac{1}{2} \ln 2$.

با برابر قرار دادن آرگمان‌ها: $y = \arg(1 + i) = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$ ، برای n صحیح. پس،

جواب‌ها عبارتند از:

$$z = \frac{1}{2} \ln 2 + i \left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi \right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

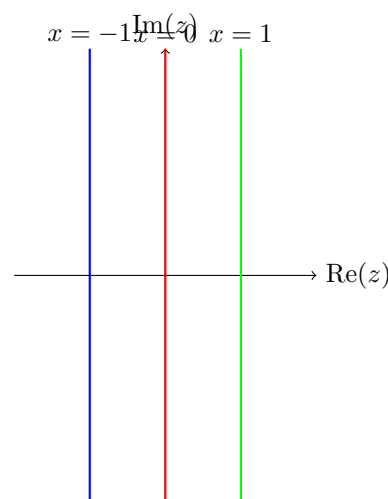
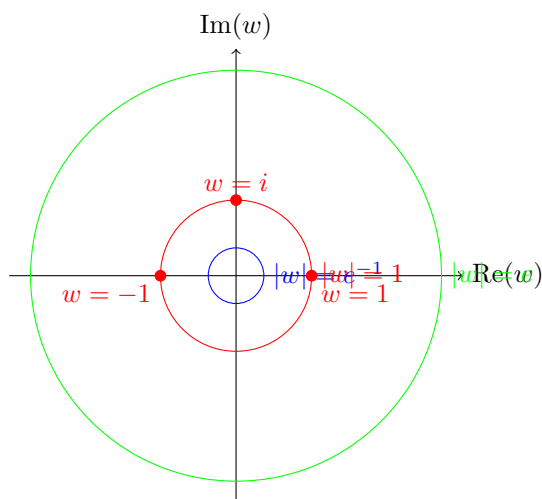
۴.۱.۳ کاربردها و نتایج

تابع نمایی در تحلیل مختلط نقش محوری دارد و به عنوان پایه‌ای برای تعریف توابع لگاریتمی و مثلثاتی عمل می‌کند. تناوب و خاصیت غیر صفر بودن آن، مطالعه نگاشت‌های مختلط و حل معادلات دیفرانسیل را تسهیل می‌کند. در کاربردها، این تابع پدیده‌های نوسانی در فیزیک، مانند انتشار موج، را مدل‌سازی می‌کند و در تحلیل فوریه اساسی است.

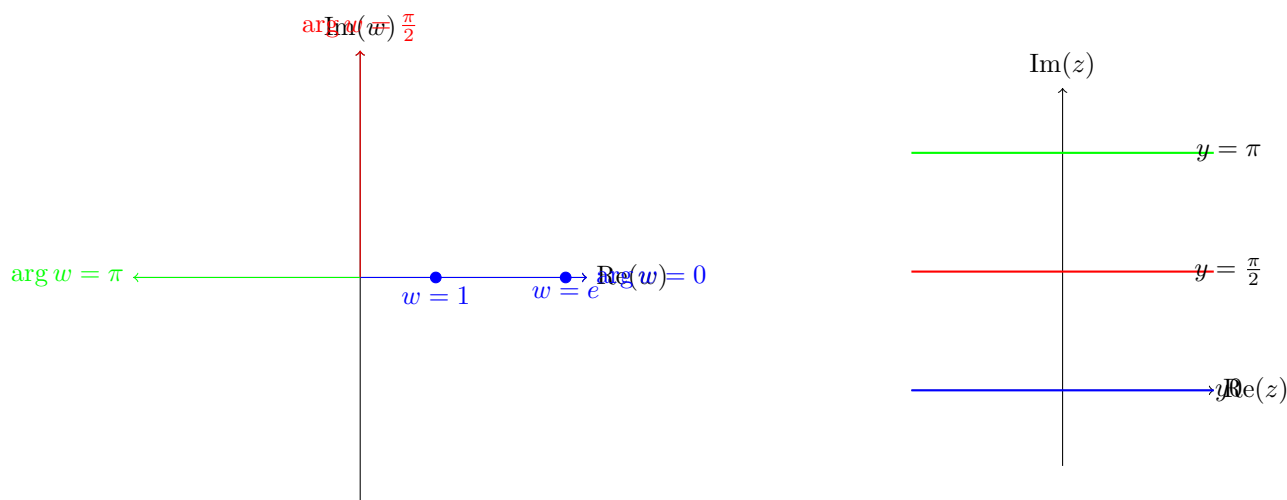
۵.۱.۳ زمینه تاریخی

توسعه تابع نمایی در تحلیل مختلط به لئونارد اویلر در قرن هجدهم نسبت داده می‌شود. او با برقراری فرمول اویلر، $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ ، پل ارتباطی بین توابع نمایی و مثلثاتی ایجاد کرد و تحلیل ریاضی را متحول ساخت. این ارتباط، پیامدهای عمیقی در فیزیک، مهندسی و نظریه اعداد دارد و سنگ بنای ریاضیات مدرن را تشکیل می‌دهد.

تابع نمایی e^z صفحه مختلط را به شیوه‌ای متمایز نگاشت می‌کند. برای یک بخش حقیقی ثابت $x = c$ ، تابع $e^{c+iy} = e^c(\cos y + i \sin y)$ با تغییر y ، دایره‌ای با شعاع e^c در صفحه مختلط رسم می‌کند که نشان‌دهنده ماهیت دوره‌ای در امتداد محور موهومی است. برعکس، برای یک بخش موهومی ثابت $y = d$ ، $e^{x+id} = e^x(\cos d + i \sin d)$ پرتویی را توصیف می‌کند که از مبدأ با زاویه d منشعب می‌شود. این نگاشت، خطوط افقی را به دایره‌ها و خطوط عمودی را به پرتوها تبدیل می‌کند و هم رشد نمایی و هم رفتار نوسانی را نشان می‌دهد.



شکل ۱.۳: نگاشت خطوط عمودی در صفحه z به دایره‌ها در صفحه w تحت تابع نمایی $w = e^z$. خطوط عمودی آبی، قرمز، و سبز به ترتیب با $x = -1$ ، $x = 0$ ، و $x = 1$ متناظر هستند، که به دایره‌ها با شعاع‌ها $e^{-1} \approx 0.3679$ ، 1 ، و $e \approx 2.7183$ نگاشت می‌شوند. نقاط خاص روی دایره واحد مشخص شده‌اند: $z = 0 + i0 \mapsto w = 1$ و $z = 0 + i\pi \mapsto w = -1$ و $z = 0 + i\frac{\pi}{2} \mapsto w = i$.



شکل ۲.۳: نگاشت خطوط افقی در صفحه z به پرتوها در صفحه w تحت تابع نمایی $w = e^z$. خطوط افقی آبی، قرمز، و سبز به ترتیب با $y = 0$ ، $y = \frac{\pi}{2}$ ، و $y = \pi$ متناظر هستند، که به پرتوها با زاویه‌های 0 ، $\frac{\pi}{2}$ ، و π رادیان نگاشت می‌شوند. نقاطی مانند $z = 0 + i0 \mapsto w = 1$ و $z = 1 + i0 \mapsto w = e$ روی پرتو برای $y = 0$ نشان داده شده‌اند.

۷.۱.۳ تمرین‌ها

تمرین‌های زیر، درک تابع نمایی را تقویت می‌کنند و برای اطمینان از وضوح، راه‌حل‌ها ارائه شده‌اند:

(آ) محاسبه e^{2+3i} :

$$e^{2+3i} = e^2(\cos 3 + i \sin 3).$$

در اینجا، $\cos 3 \approx -0.9900$ ، $\sin 3 \approx 0.1411$ ، بنابراین:

$$e^{2+3i} \approx e^2(-0.9900 + 0.1411i) \approx -7.3151 + 1.0424i.$$

(ب) یافتن همه جواب‌های $e^z = -2$: بگذارید $z = x + iy$:

$$e^x(\cos y + i \sin y) = -2.$$

۲.۳ تابع لگاریتمی

از آنجا که $2 -$ حقیقی و منفی است، $\cos y = -1$ ، $\sin y = 0$ ، پس $y = (2k + 1)\pi$ ، برای k صحیح. سپس، $e^x \cdot (-1) = -2$ ، بنابراین $e^x = 2$ ، پس $x = \ln 2$. جوابها عبارتند از:

$$z = \ln 2 + i(2k + 1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(ج) نشان دهید که $e^z = e^w$ اگر و تنها اگر $z = w + 2\pi ik$ برای یک k صحیح: اگر $e^z = e^w$ ، آنگاه $e^{z-w} = 1$. از آنجا که $e^\zeta = 1$ مستلزم $\zeta = 2\pi ik$ است، داریم $z - w = 2\pi ik$ ، پس $z = w + 2\pi ik$. برعکس، اگر $z = w + 2\pi ik$ ، آنگاه:

$$e^z = e^{w+2\pi ik} = e^w e^{2\pi ik} = e^w \cdot 1 = e^w.$$

۸.۱.۳ تمرینهای دشوارتر

این مسائل پیشرفته، درک عمیقتری را به چالش می‌کشند و بدون راه‌حل ارائه شده‌اند:

(آ) ثابت کنید که تابع نمایی e^z در کل صفحه مختلط یک به یک نیست، اما در هر نوار افقی

با عرض کمتر از 2π ، مانند $\{z = x + iy \mid a < y < a + 2\pi\}$ ، یک به یک است.

(ب) تصویر تابع نمایی را توصیف کنید، یعنی مجموعه $\{e^z \mid z \in \mathbb{C}\}$.

۲.۳ تابع لگاریتمی

۲.۳ تابع لگاریتمی

۱.۲.۳ تعریف

تابع لگاریتمی برای یک متغیر مختلط $z \neq 0$ ، که به صورت قطبی به شکل $z = re^{i\theta}$ بیان شده است، که در آن $r = |z| > 0$ و $\theta = \arg z$ ، به عنوان معکوس تابع نمایی تعریف می‌شود. آن $e^w = z$ را ارضا می‌کند و به صورت زیر داده می‌شود:

$$\log z = \ln r + i(\theta + 2n\pi), \quad n \in \mathbb{Z},$$

که در آن $\ln r$ لگاریتم طبیعی عدد حقیقی مثبت r است، و θ آرگمان z است، که به دلیل تفاوت زوایا به مضارب 2π ، چند مقداری است. مقدار اصلی، که با $\log z$ نشان داده می‌شود، با محدود کردن θ به آرگمان اصلی $\text{Arg } z \in (-\pi, \pi]$ به دست می‌آید:

$$\log z = \ln r + i \text{Arg } z.$$

این باعث می‌شود $\log z$ تک‌مقداری باشد، تعریف شده بر $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

۲.۲.۳ ویژگی‌ها

تابع لگاریتمی دارای چندین ویژگی کلیدی است که برای نقش آن در تحلیل مختلط حیاتی است:

(آ) خاصیت ضرب: برای $z_1, z_2 \neq 0$ ،

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2,$$

که برابری به معنای برابری مجموعه‌ها است، یعنی مجموعه همه مقادیر ممکن $\log(z_1 z_2)$ برابر با مجموعه همه جمع‌های مقادیر از $\log z_1$ و $\log z_2$ است. برای شاخه اصلی، به طور کلی $\log(z_1 z_2) \neq \log z_1 + \log z_2$ ، به دلیل محدودیت بر آرگمان.

(ب) خاصیت تقسیم: به طور مشابه،

$$\log\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \log z_1 - \log z_2,$$

باز هم به عنوان برابری مجموعه‌ها.

(ج) رابطه نمایی: لگاریتم و نمایی معکوس یکدیگرند:

$$e^{\log z} = z, \quad \log(e^w) = w + 2n\pi i, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

برای شاخه اصلی، $e^{\log z} = z$ ، اما $\log(e^w) = w$ تنها اگر $\text{Im } w \in (-\pi, \pi]$.

(د) مشتق: شاخه اصلی $\log z$ در $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ تحلیلی است، با:

$$\frac{d}{dz} \log z = \frac{1}{z}.$$

این از مشتق‌گیری $e^{\log z} = z$ پیروی می‌کند.

(ه) ماهیت چند مقداری: این تابع به دلیل تناوب تابع نمایی، $e^{z+2\pi i} = e^z$ ، چند مقداری است و برای تعریف نسخه‌های تک‌مقداری نیاز به شاخه‌ها دارد.

۳.۲.۳ مثال‌های گویا

برای روشن کردن رفتار تابع، مثال‌های زیر را در نظر بگیرید:

(آ) محاسبه $\log(1)$: از آنجا که $1 = e^{i \cdot 0}$ ، $r = 1$ ، $\theta = 0$

$$\log 1 = \ln 1 + i(0 + 2n\pi) = 2n\pi i, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

مقدار اصلی:

$$\log 1 = \ln 1 + i \cdot 0 = 0.$$

(ب) محاسبه $\log(-1 - \sqrt{3}i)$: برای $z = -1 - \sqrt{3}i$ محاسبه کنید $r = |z|$

$\sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$ و $\theta = \arg z$. از آنجا که z در ربع سوم است،

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) - \pi = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}$$

$$\log(-1 - \sqrt{3}i) = \ln 2 + i\left(-\frac{2\pi}{3} + 2n\pi\right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

مقدار اصلی:

$$\log(-1 - \sqrt{3}i) = \ln 2 - i\frac{2\pi}{3}.$$

(ج) حل $e^z = 2i$: بگذارید $z = x + iy$. آنگاه:

$$e^x e^{iy} = 2i = 2e^{i\pi/2}.$$

با برابر قرار دادن قدر مطلق‌ها: $e^x = 2$ ، پس $x = \ln 2$. با برابر قرار دادن آرگمان‌ها: $y = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ ، $n \in \mathbb{Z}$. بنابراین:

$$z = \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

۴.۲.۳ کاربردها و نتایج

تابع لگاریتمی در تعریف توان‌های مختلط از طریق $z^c = e^{c \log z}$ ، که چند مقداری است، و $z^c = e^{c \log z}$ برای شاخه اصلی، اساسی است. همچنین در حل معادلات نمایی و در انتگرال‌گیری کانتوری، که در آن برش‌های شاخه باید با دقت مدیریت شوند، ضروری است. کاربردها شامل پردازش سیگنال، دینامیک سیالات، و مطالعه توابع هارمونیک است.

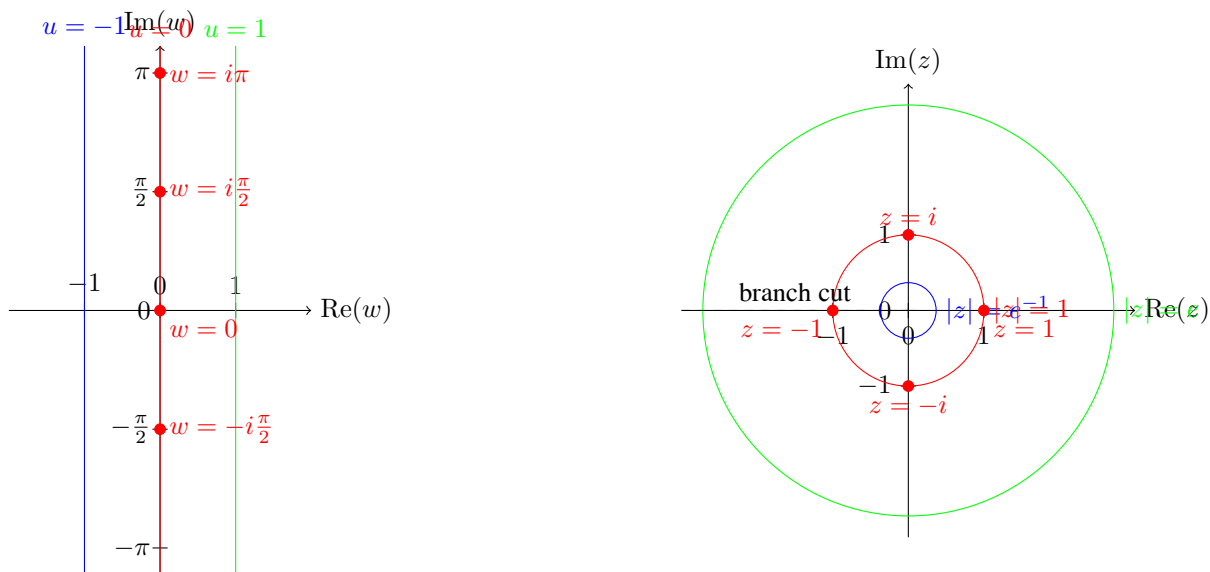
۲.۳ تابع لگاریتمی

۵.۲.۳ زمینه تاریخی

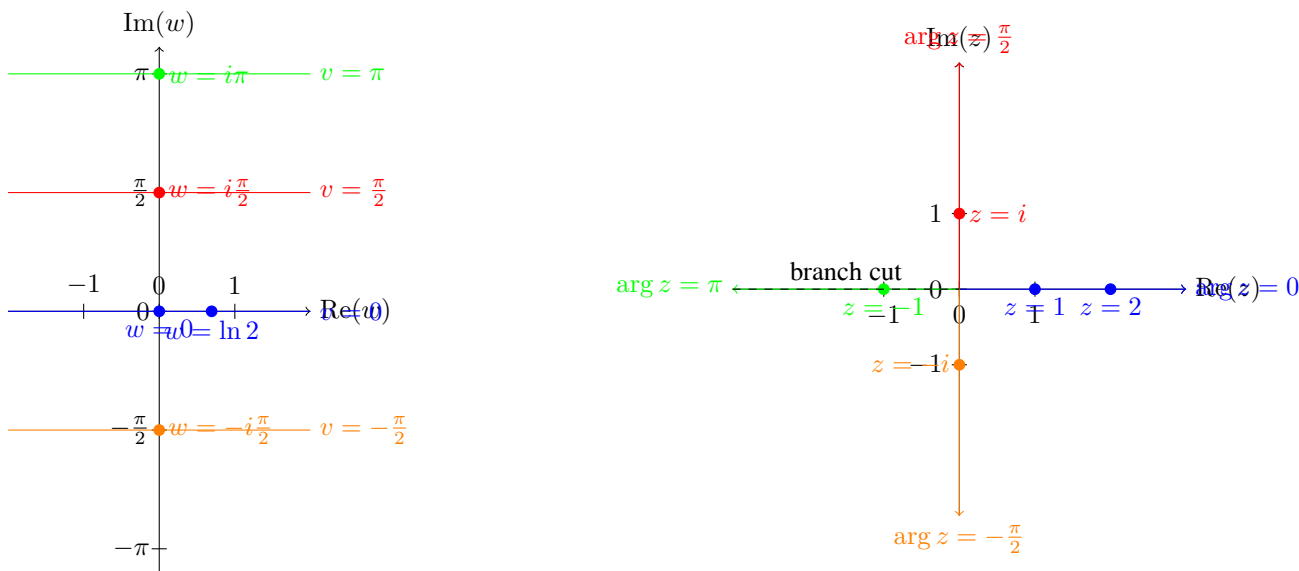
لگاریتم مختلط در قرن هجدهم توسط لئونارد اویلر رسمی شد، که کار او بر روی تابع نمایی و ارتباط آن با توابع مثلثاتی از طریق $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ پایه‌ای برای درک لگاریتم به عنوان معکوس آن فراهم کرد. مشارکت‌های گاوس و ریمان، ماهیت چند مقداری آن و مفهوم سطوح ریمانی را بیشتر روشن کرد و نقش آن را در تحلیل مختلط تقویت نمود.

۶.۲.۳ شهود

تابع لگاریتمی $\log z$ صفحه مختلط (به جز صفر) را به خانواده‌ای بی‌نهایت از نوارهای افقی در صفحه مختلط، هر یک با ارتفاع 2π ، نگاشت می‌کند. برای شاخه اصلی $\log z$ ، صفحه مختلط منهای محور حقیقی غیرمثبت به نوار $\{w = u + iv \mid u \in \mathbb{R}, -\pi < v \leq \pi\}$ نگاشت می‌شود. بخش حقیقی، $\ln |z|$ ، فاصله لگاریتمی از مبدأ را اندازه‌گیری می‌کند، در حالی که بخش موهومی، $\text{Arg } z$ ، زاویه را نشان می‌دهد. برای مثال، نقاط روی دایره واحد $|z| = 1$ به خطوط عمودی در $u = 0$ ، با v از $-\pi$ تا π ، نگاشت می‌شوند. خطوط افقی در صفحه مختلط به خطوط عمودی، و خطوط شعاعی از مبدأ به خطوط افقی در محدوده لگاریتم نگاشت می‌شوند.



شکل ۳.۳: نمایش دایره‌ها $|z| = r$ به خطوط عمودی $\text{Re}(w) = \ln r$ تحت تابع لگاریتمی اصلی $w = \log z$. دایره‌های آبی، قرمز و سبز به ترتیب به $r = e^{-1}$ ، $r = 1$ و $r = e$ مربوط می‌شوند و به خطوط $u = 1$ و $u = 0$ ، $u = -1$ نگاشت می‌شوند. نقاط خاصی روی دایره واحد نشان داده شده‌اند: $z = i \mapsto w = i\frac{\pi}{2}$ ، $z = 1 \mapsto w = 0$ و $z = -i \mapsto w = -i\frac{\pi}{2}$ و $z = -1 \mapsto w = i\pi$. برش شاخه در امتداد محور حقیقی منفی با خط چین نشان داده شده است.



شکل ۳.۴: نگاشت پرتوهای $\arg z = \theta$ به خطوط افقی $\text{Im}(w) = \theta$ تحت تابع لگاریتمی اصلی $w = \log z$. پرتوهای آبی، قرمز، و نارنجی به ترتیب با $\theta = 0$ ، $\theta = \frac{\pi}{2}$ و $\theta = \pi$ متناظر هستند، که به خطوط $v = 0$ ، $v = \frac{\pi}{2}$ و $v = \pi$ نگاشت می‌شوند. نقاط خاص نشان داده شده‌اند: $z = 1 \mapsto w = 0$ و $z = i \mapsto w = i\frac{\pi}{2}$ و $z = -i \mapsto w = -i\frac{\pi}{2}$ و $z = -1 \mapsto w = i\pi$ و $z = 2 \mapsto w = \ln 2$.

تمرین‌های زیر درک را تقویت می‌کنند، با راه‌حلی برای وضوح ارائه شده‌اند:

(آ) محاسبه $\log(i)$: از آنجا که $i = e^{i\pi/2}$ ، $r = 1$ ، $\theta = \pi/2$

$$\log i = \ln 1 + i \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) = i \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

مقدار اصلی: $\log i = i\frac{\pi}{2}$.

(ب) یافتن همه جواب‌های $e^z = -2$: بگذارید $z = x + iy$:

$$e^x e^{iy} = -2 = 2e^{i\pi}.$$

پس، $e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2$ و $y = \pi + 2n\pi$ ، $n \in \mathbb{Z}$. بنابراین:

$$z = \ln 2 + i(\pi + 2n\pi), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

(ج) تأیید $\frac{d}{dz} \log z = \frac{1}{z}$: از آنجا که $e^{\log z} = z$ ، هر دو طرف را مشتق بگیرید:

$$e^{\log z} \cdot \frac{d}{dz} \log z = 1 \Rightarrow z \cdot \frac{d}{dz} \log z = 1 \Rightarrow \frac{d}{dz} \bullet \log z = \frac{1}{z}.$$

۳.۳ شاخه‌ها و مشتقات لگاریتم‌ها

۸.۲.۳ تمرین‌های دشوارتر

این مسائل پیشرفته، درک عمیق‌تری را به چالش می‌کشند و بدون راه‌حل ارائه شده‌اند:

(آ) برش‌های شاخه تابع لگاریتمی و تأثیر آن‌ها بر تحلیلی بودن آن را بحث کنید.

(ب) ثابت کنید که تابع لگاریتمی خطوط افقی در صفحه مختلط را به خطوط عمودی در محدوده خود نگاشت می‌کند.

(ج) سطح ریمانی برای تابع لگاریتمی و چگونگی رفع ماهیت چند مقداری آن را کاوش کنید.

۳.۳ شاخه‌ها و مشتقات لگاریتم‌ها

۱.۳.۳ تعریف لگاریتم چند مقداری

لگاریتم مختلط به عنوان معکوس تابع نمایی تعریف می‌شود. برای یک عدد مختلط غیر صفر z ، که به صورت قطبی به شکل $z = re^{i\theta}$ بیان شده است، که در آن $r = |z| > 0$ و $\theta = \arg z$ ، لگاریتم مجموعه همه w هایی است که $e^w = z$. به دلیل تناوب تابع نمایی، $e^{w+2\pi ik} = e^w$ ، لگاریتم چند مقداری است:

$$\log z = \ln r + i(\theta + 2n\pi), \quad n \in \mathbb{Z},$$

که در آن $\ln r$ لگاریتم طبیعی عدد حقیقی مثبت r است، و θ آرگمان است، که به مضارب 2π متفاوت است.

۳.۳ شاخه‌ها و مشتقات لگاریتم‌ها

۲.۳.۳ شاخه‌های لگاریتم

برای به دست آوردن یک تابع تک‌مقداری، یک شاخه با محدود کردن آرگمان به یک بازه خاص تعریف می‌شود. شاخه اصلی، که با $\log z$ نشان داده می‌شود، از آرگمان اصلی $\text{Arg } z \in (-\pi, \pi]$ استفاده می‌کند:

$$\log z = \ln |z| + i \text{Arg } z.$$

این شاخه در دامنه $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ پیوسته و تحلیلی است، با محور حقیقی منفی (شامل مبدأ) به عنوان برش شاخه. شاخه‌های دیگر می‌توانند با انتخاب بازه‌های مختلف، مانند $\theta \in (0, 2\pi]$ ، با برش‌های شاخه مربوطه (مثلاً محور حقیقی مثبت) تعریف شوند. مبدأ $z = 0$ یک نقطه شاخه است، که در آن لگاریتم تعریف نشده است، و برش شاخه با جلوگیری از پیچش آرگمان حول این نقطه، پیوستگی را تضمین می‌کند.

۳.۳.۳ مشتقات شاخه‌های لگاریتمی

برای هر شاخه $L(z)$ از لگاریتم، که به گونه‌ای تعریف شده است که $e^{L(z)} = z$ ، مشتق با استفاده از رابطه تابع معکوس محاسبه می‌شود. با مشتق‌گیری از هر دو طرف $e^{L(z)} = z$:

$$e^{L(z)} \cdot L'(z) = 1 \implies L'(z) = \frac{1}{e^{L(z)}} = \frac{1}{z}.$$

بنابراین، برای هر شاخه، از جمله شاخه اصلی $\log z$ ، مشتق برابر است با:

$$\frac{d}{dz} L(z) = \frac{1}{z}$$

۳.۳ شاخه‌ها و مشتقات لگاریتم‌ها

به شرطی که z روی برش شاخه نباشد. این در دامنه تحلیلی، مانند $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ برای شاخه اصلی، برقرار است.

۴.۳.۳ مثال‌های گویا

مثال‌های زیر رفتار شاخه‌های لگاریتمی و مشتقات آن‌ها را نشان می‌دهند:

(آ) محاسبه $\log(1)$: از آنجا که $|1| = 1$ و $\text{Arg}(1) = 0$ ،

$$\log(1) = \ln 1 + i \cdot 0 = 0.$$

(ب) محاسبه $\log(i)$: از آنجا که $|i| = 1$ و $\text{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}$ ،

$$\log(i) = \ln 1 + i \cdot \frac{\pi}{2} = i \frac{\pi}{2}.$$

(ج) محاسبه $\log(-1)$: از آنجا که $|-1| = 1$ و $\text{Arg}(-1) = \pi$ ،

$$\log(-1) = \ln 1 + i\pi = i\pi.$$

(د) یافتن همه مقادیر $\log(-i)$: از آنجا که $-i = e^{i(-\frac{\pi}{2})}$ ، $|-i| = 1$ ، و $\arg(-i) =$

$$-\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\log(-i) = \ln 1 + i \left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) = i \left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right).$$

۳.۳ شاخه‌ها و مشتقات لگاریتم‌ها

(ه) محاسبه مشتق $\log(z)$ در $z = i$: از آنجا که $\frac{d}{dz} \log(z) = \frac{1}{z}$ ، در $z = i$ ،

$$\left. \frac{d}{dz} \log(z) \right|_{z=i} = \frac{1}{i} = -i.$$

۵.۳.۳ کاربردها و نتایج

شاخه‌های لگاریتم برای تعریف توان‌های مختلط از طریق $z^c = e^{c \log z}$ ، که چند مقداری است، یا $z^c = e^{c \text{Log} z}$ برای شاخه اصلی، ضروری هستند. آن‌ها همچنین حل معادلات نمایی، مانند $e^z = w$ ، که در آن $z = \log w$ ، را تسهیل می‌کنند. مشتق $\frac{1}{z}$ در انتگرال‌گیری کانتوری و تحلیل توابع هارمونیک حیاتی است، با کاربردهایی در فیزیک و مهندسی، مانند پردازش سیگنال و دینامیک سیالات.

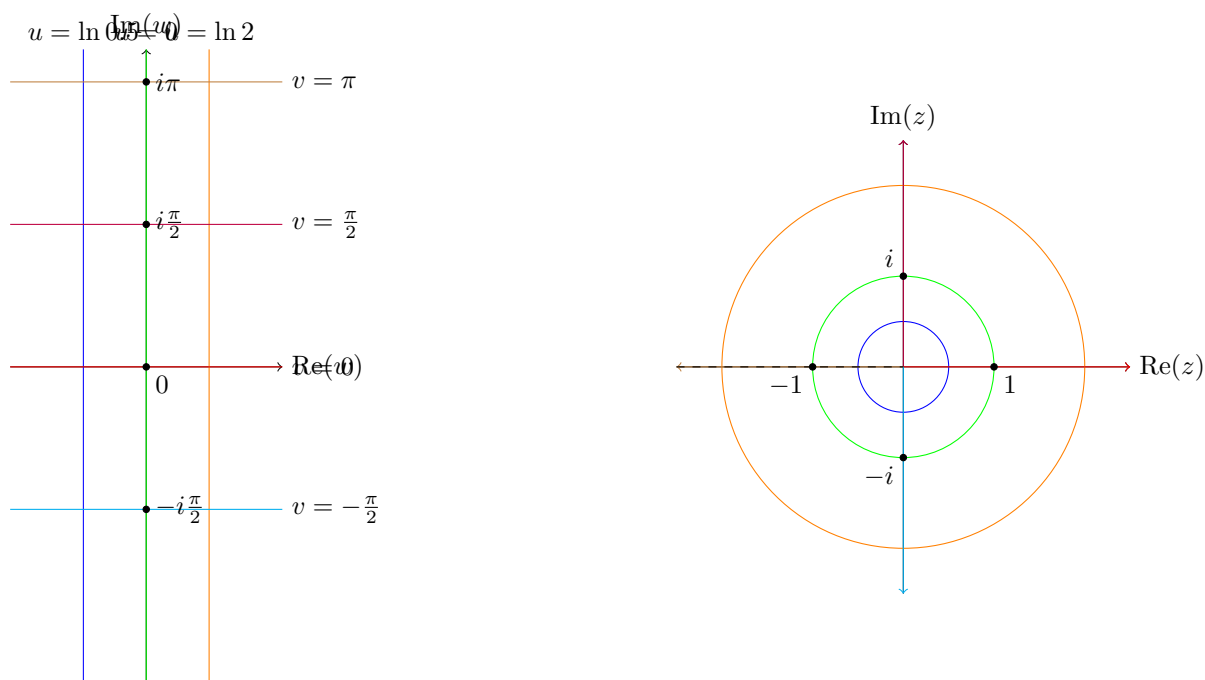
۶.۳.۳ زمینه تاریخی

لگاریتم مختلط در قرن هجدهم توسط لئونارد اویلر رسمی شد، که آن را به توابع مثلثاتی از طریق $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ پیوند داد. مفهوم شاخه‌ها و برش‌های شاخه بعداً در قرن نوزدهم توسط برنهارد ریمان توسعه یافت، که سطوح ریمانی را برای مدیریت توابع چند مقداری معرفی کرد و به طور قابل توجهی تحلیل مختلط را پیش برد.

۳.۳ شاخه‌ها و مشتقات لگاریتم‌ها

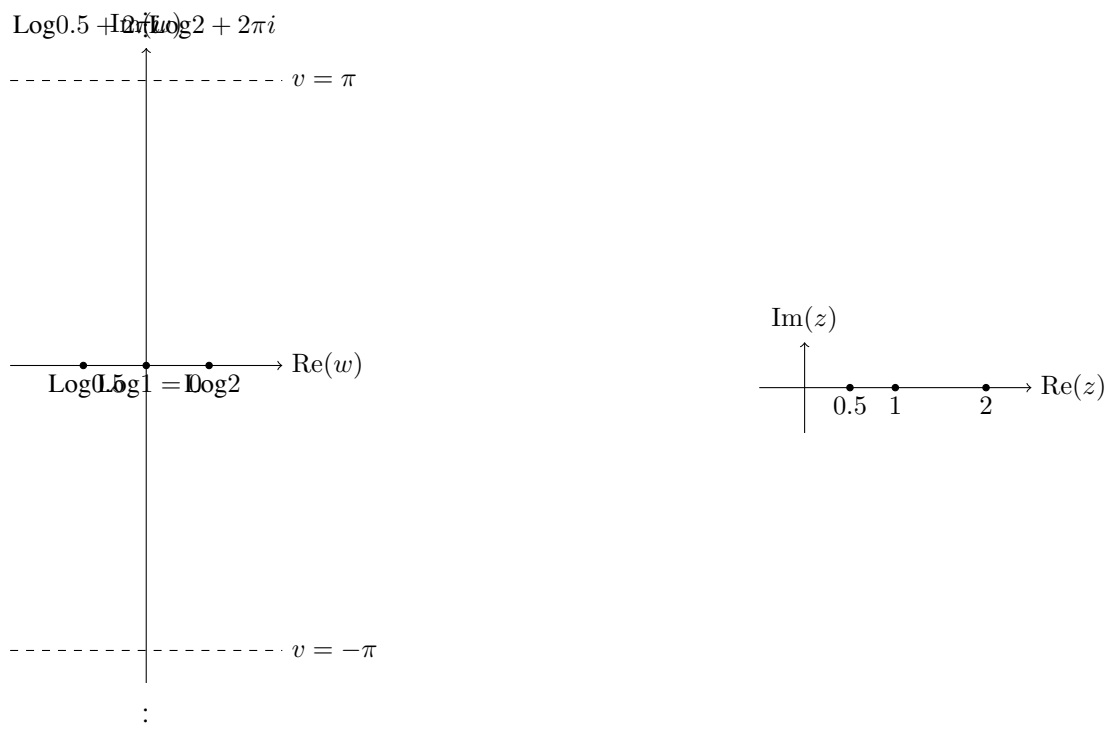
۷.۳.۳ شهود

شاخه اصلی $\log z$ صفحه مختلط، به استثنای محور حقیقی منفی، را به نوار افقی $\{w = u + iv \mid u \in \mathbb{R}, -\pi < v \leq \pi\}$ نگاشت می‌کند. خطوط شعاعی از مبدأ، که در آن $z = re^{i\theta}$ با θ ثابت، به خطوط افقی $w = \ln r + i\theta$ نگاشت می‌شوند، زیرا r تغییر می‌کند و بخش حقیقی $u = \ln r$ را تنظیم می‌کند. دایره‌های مرکز مبدأ، $|z| = R$ ، به پاره‌خط‌های عمودی $w = \ln R + i\theta$ نگاشت می‌شوند، با θ از $-\pi$ تا π ، که بازتابی از باز کردن زوایا و مقیاس لگاریتمی اندازه است.



شکل ۵.۳: نگاشت زیر شاخه اصلی لگاریتم، $\text{Log } z$. چپ: صفحه z با دایره‌های $|z| = 0.5, 1, 2$ و پرتوهای $\arg z = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, -\frac{\pi}{2}$. راست: صفحه w با خطوط عمودی متناظر $u = \ln r$ و خطوط افقی $v = \theta$. نقاط خاص $z = 1, i, -1, -i$ به ترتیب به $w = 0, i\frac{\pi}{2}, i\pi, -i\frac{\pi}{2}$ نگاشت می‌شوند. برش شاخه در محور منفی حقیقی با خط همیشه نشان داده شده است.

۳.۳ شاخه‌ها و مشتقات لگاریتم‌ها



شکل ۶.۳: نمایش خاصیت چند مقداری لوگاریتم. چپ: صفحه z با نقاط $z = 0.5, 1, 2$. راست: صفحه w نشان دهنده مقادیر اصلی $\text{Log} z$ در نوار $-\pi < v \leq \pi$ ، با نشانه‌هایی که مقادیر دیگری در $\text{Log} z + 2\pi i k$ برای اعداد صحیح $k \neq 0$ وجود دارند. نقاط: نشان دهنده ادامه مقادیر در فواصل $2\pi i$ هستند.

۸.۳.۳ تمرین‌ها

تمرین‌های زیر درک را تقویت می‌کنند، با راه‌حل‌هایی برای وضوح ارائه شده‌اند:

(آ) محاسبه $\log(2 + 2i)$: راه‌حل: محاسبه $|z| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. آرگمان

$\text{Arg}(2 + 2i) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$ است، زیرا z در ربع اول است. بنابراین،

$$\log(2+2i) = \ln(2\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4} = \ln 2 + \ln \sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} = \left(\ln 2 + \frac{1}{2} \ln 2\right) + i\frac{\pi}{4} = \frac{3}{2} \ln 2 + i\frac{\pi}{4}.$$

(ب) یافتن همه مقادیر $\log(-i)$: راه‌حل: از آنجا که $-i = e^{i(-\frac{\pi}{2})}$ ، $|-i| = 1$ ، و $\arg(-i) =$

۴.۳ برخی هویت‌های مربوط به لگاریتم‌ها

$$n \in \mathbb{Z} \text{ برای } -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

$$\log(-i) = \ln 1 + i \left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) = i \left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right).$$

(ج) محاسبه $\frac{d}{dz} [\log(z^2 + 1)]$ در $z = 0$: راه‌حل: با استفاده از قاعده زنجیره‌ای، $\frac{d}{dz} \log(f(z)) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ که در آن $f(z) = z^2 + 1$. بنابراین، $f'(z) = 2z$ و در $z = 0$ ، $f(0) = 1$ ، که روی برش شاخه نیست. از این رو،

$$\left. \frac{d}{dz} \log(z^2 + 1) \right|_{z=0} = \frac{2 \cdot 0}{0^2 + 1} = 0.$$

۹.۳.۳ تمرین‌های دشوارتر

این مسائل پیشرفته، درک عمیق‌تری را به چالش می‌کشند و بدون راه‌حل ارائه شده‌اند:

(آ) تحلیلی بودن $\log(z)$ را بحث کنید و مشخص کنید که در کجا تحلیلی نیست.

(ب) یک شاخه از $\log z$ را تعریف کنید که در دامنه $|z| > 1$ تحلیلی باشد، و مقدار آن را در $z = 2$ محاسبه کنید.

۴.۳ برخی هویت‌های مربوط به لگاریتم‌ها

در آنالیز مختلط، لگاریتم یک تابع چندمقداری است به دلیل تناوب تابع نمایی، که مستلزم فرمول‌بندی دقیق هویت‌های آن در مقایسه با لگاریتم‌های حقیقی است.

۴.۳ برخی هویت‌های مربوط به لگاریتم‌ها

۱.۴.۳ تعاریف

- لگاریتم چندمقداری: برای یک عدد مختلط $z = re^{i\theta}$ ، که در آن $r = |z| > 0$ و $\theta = \arg z$ ، لگاریتم عبارت است از:

$$\log z = \ln r + i(\theta + 2n\pi), \quad n \in \mathbb{Z},$$

که در آن $\ln r$ لگاریتم طبیعی r است.

- مقدار اصلی: مقدار اصلی، که با z نشان داده می‌شود، آرگمان را به $\theta \in (-\pi, \pi]$ محدود می‌کند:

$$z = \ln r + i \operatorname{Arg} z.$$

۲.۴.۳ هویت‌های کلیدی

(آ) هویت ضرب:

- برای لگاریتم چندمقداری:

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2,$$

به این معنا که مجموعه همه مقادیر $\log(z_1 z_2)$ برابر با مجموعه همه جمع‌های مقادیر $\log z_1$ و $\log z_2$ است.

- برای مقدار اصلی:

$$(z_1 z_2) = z_1 + z_2 + 2\pi i k,$$

۴.۳ برخی هویت‌های مربوط به لگاریتم‌ها

که در آن $k \in \mathbb{Z}$ تضمین می‌کند که بخش موهومی در $(-\pi, \pi]$ باشد. اگر $-\pi < -\pi$ $\text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2 \leq \pi$ ، آنگاه $k = 0$.

(ب) هویت کسر:

• برای لگاریتم چندمقداری:

$$\log \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \log z_1 - \log z_2.$$

• برای مقدار اصلی:

$$\left(\frac{z_1}{z_2} \right) = z_1 - z_2 + 2\pi im,$$

که در آن $m \in \mathbb{Z}$.

(ج) هویت توان:

• برای لگاریتم چندمقداری و c مختلط:

$$\log(z^c) = c \log z.$$

• برای مقدار اصلی:

$$(z^c) = cz + 2\pi in,$$

که در آن $n \in \mathbb{Z}$.

(د) رابطه نمایی و لگاریتم:

$$e^{\log z} = z.$$

۴.۳ برخی هویت‌های مربوط به لگاریتم‌ها

• $\log(e^w) = w + 2\pi i k$ ، برای $k \in \mathbb{Z}$.

• برای مقدار اصلی: $e^z = z$ و $(e^w) = w$ اگر $\operatorname{Im} w \in (-\pi, \pi]$.

۳.۴.۳ استنتاج هویت‌های کلیدی

• هویت ضرب: بگذارید $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ ، $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$. آنگاه:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)},$$

بنابراین:

$$\log(z_1 z_2) = \ln(r_1 r_2) + i(\theta_1 + \theta_2 + 2n\pi) = (\ln r_1 + i(\theta_1 + 2k\pi)) + (\ln r_2 + i(\theta_2 + 2m\pi)),$$

برای اعداد صحیح k, m, n ، که هویت چندمقداری را نشان می‌دهد. برای شاخه اصلی، جمع $\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$ ممکن است نیاز به تنظیم با $2\pi i k$ داشته باشد.

• هویت کسر: به طور مشابه، $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$ ، بنابراین:

$$\log\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) + i(\theta_1 - \theta_2 + 2n\pi),$$

که با $\log z_1 - \log z_2$ مطابقت دارد. برای شاخه اصلی، با $2\pi i m$ تنظیم می‌شود.

• هویت توان: برای $z^c = e^{c \log z}$ ، محاسبه کنید:

$$\log(z^c) = \log(e^{c \log z}) = c \log z + 2\pi i k,$$

که برای حالت چندمقداری برقرار است. برای شاخه اصلی، از z استفاده کنید و با $2\pi i n$

۴.۳ برخی هویت‌های مربوط به لگاریتم‌ها

تنظیم کنید.

۴.۴.۳ مثال‌های گویا

(آ) محاسبه $\log(1)$ و (1) :

• از آنجا که $1 = e^{i \cdot 0}$ ، $\log 1 = \ln 1 + i(0 + 2n\pi) = 2n\pi i$ ، برای $n \in \mathbb{Z}$.

• مقدار اصلی: $1 = 0$.

(ب) محاسبه $\log(i)$ و (i) :

• از آنجا که $i = e^{i\pi/2}$ ، $\log i = \ln 1 + i(\pi/2 + 2n\pi) = i(\pi/2 + 2n\pi)$.

• مقدار اصلی: $i = i\pi/2$.

(ج) تأیید هویت ضرب برای $z_1 = i$ ، $z_2 = -i$:

• محاسبه: $z_1 z_2 = i \cdot (-i) = 1$ ، بنابراین $(1) = 0$.

• سپس: $i = i\pi/2$ ، $(-i) = i(-\pi/2)$ ، پس:

$$i + (-i) = i\pi/2 + i(-\pi/2) = 0,$$

که تأیید می‌کند $(z_1 z_2) = z_1 + z_2$ ، زیرا $\text{Arg } i + \text{Arg } (-i) = \pi/2 - \pi/2 = 0$.

$$0 \in (-\pi, \pi]$$

(د) تأیید هویت توان برای $z = -1$ ، $c = 2$:

• محاسبه: $(-1)^2 = 1$ ، بنابراین $((-1)^2) = (1) = 0$.

۴.۳ برخی هویت‌های مربوط به لگاریتم‌ها

• سپس: $(-1) = i\pi$ ، پس $2(-1) = 2i\pi$.

• از آنجا که $0 = 2i\pi - 2\pi i$ ، هویت $(z^2) = 2z + 2\pi i k$ با $k = -1$ برقرار است.

۵.۴.۳ کاربردها و نتایج

این هویت‌ها برای تعریف توان‌های مختلط از طریق $z^c = e^{c \log z}$ ، حل معادلات نمایی، و انجام انتگرال‌گیری کانتوری، که در آن برش‌های شاخه باید مدیریت شوند، حیاتی هستند. آن‌ها پایه‌ای برای کاربردها در پردازش سیگنال، دینامیک سیالات، و تحلیل توابع هارمونیک فراهم می‌کنند.

۶.۴.۳ زمینه تاریخی

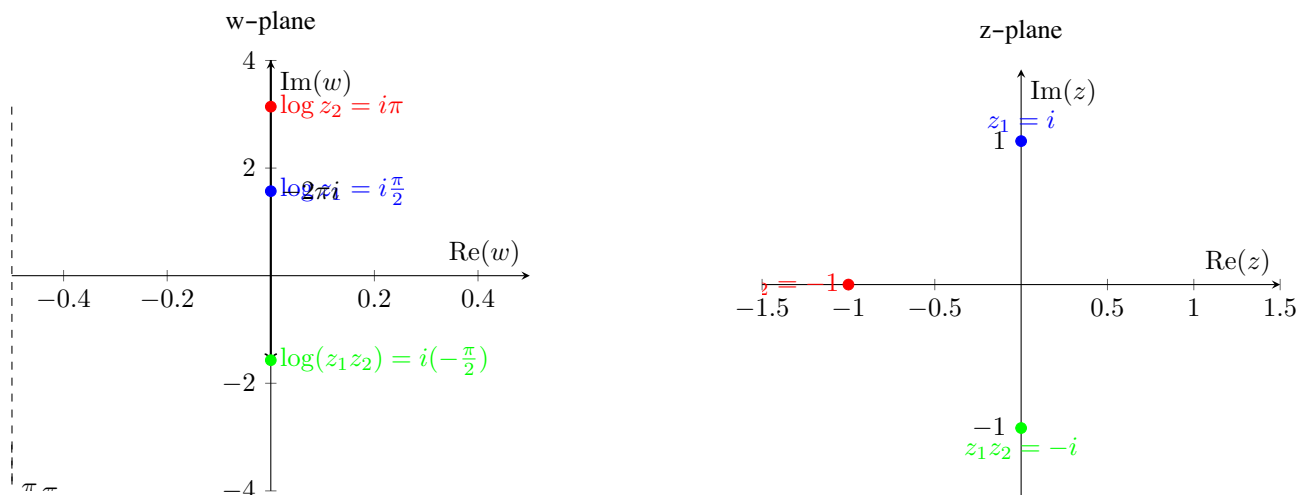
لگاریتم مختلط و هویت‌های آن در قرن هجدهم توسط لئونارد اویلر رسمی شد، که نمایی‌ها را به توابع مثلثاتی از طریق $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ پیوند داد. کار برنهارد ریمان در قرن نوزدهم بر روی سطوح ریمانی، چارچوبی برای مدیریت توابع چندمقداری ارائه داد و درک این هویت‌ها را تقویت کرد.

۷.۴.۳ شهود

لگاریتم چندمقداری $\log z$ صفحه مختلط (به استثنای صفر) را به پشته‌ای بی‌نهایت از نوارهای افقی، هر یک با ارتفاع 2π ، نگاشت می‌کند، که هر کدام به شاخه‌های مختلف مطابق دارند. برای شاخه اصلی z ، صفحه مختلط منهای محور حقیقی منفی به نوار $-\pi < v \leq \pi$ ، $\{w = u + iv \mid u \in \mathbb{R}, -\pi < v \leq \pi\}$ نگاشت می‌شود. خطوط شعاعی $z = re^{i\theta}$ با θ ثابت به خطوط افقی $w = \ln r + i\theta$ نگاشت

۴.۳ برخی هویت‌های مربوط به لگاریتم‌ها

می‌شوند، در حالی که دایره‌ها $|z| = R$ به پاره‌خط‌های عمودی $w = \ln R + i\theta$ با $\theta \in (-\pi, \pi]$ نگاشت می‌شوند، که مقیاس لگاریتمی اندازه و باز کردن زوایا را نشان می‌دهد.



شکل ۷.۳: نمایش هویت ضرب برای لگاریتم اصلی. برای $z_1 = i$ و $z_2 = -1$ داریم $z_1 z_2 = -i$. در صفحه w ، $\log z_1 + \log z_2 = i(\frac{\pi}{2} + \pi) = i\frac{3\pi}{2}$ ، که خارج از نوار اصلی $-\pi < v \leq \pi$ است. با کسر $2\pi i$ ، نتیجه $i(\frac{3\pi}{2} - 2\pi) = i(-\frac{\pi}{2})$ به دست می‌آید، که با $\log(z_1 z_2)$ مطابقت دارد.

۸.۴.۳ تمرین‌ها

(آ) محاسبه $\log(-i)$ و $(-i)$:

• راه‌حل: از آنجا که $-i = e^{i(-\pi/2)}$ ، $\log(-i) = \ln 1 + i(-\pi/2 + 2n\pi)$ ،

$i(-\pi/2 + 2n\pi)$. مقدار اصلی: $(-i) = i(-\pi/2)$.

(ب) نشان دهید که برای $z_1 = 1 + i$ ، $z_2 = 1 - i$ ، هویت ضرب برقرار است:

• راه‌حل: محاسبه $z_1 z_2 = (1 + i)(1 - i) = 2$ ، پس $\ln 2 = \ln 2$. سپس، $(1 + i)$

$\ln \sqrt{2} + i\pi/4$ ، $\ln \sqrt{2} + i(-\pi/4)$ ، جمع: $(1 - i)$ ، $\ln \sqrt{2} + i\pi/4 - i\pi/4 = \ln 2$

پس $k = 0$ ، $\pi/4 = \ln 2$

۵.۳ توان‌های مختلط

(ج) تأیید $((1+i)^2) = 2(1+i)$:

• راه‌حل: محاسبه $(1+i)^2 = 2i$ ، پس $(2i) = \ln 2 + i\pi/2$. سپس، $2(1+i) = 2(\ln \sqrt{2} + i\pi/4) = \ln 2 + i\pi/2$ پس برابری برقرار است.

۹.۴.۳ تمرین‌های دشوارتر

(آ) ثابت کنید که $(z_1 z_2) = z_1 + z_2$ اگر و تنها اگر $-\pi < \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2 \leq \pi$.
 (ب) هویت $\log(z^c) = c \log z$ را برای c مختلط بحث کنید و انتخاب شاخه را توضیح دهید.

۵.۳ توان‌های مختلط

۱.۵.۳ تعریف

برای اعداد مختلط $z \neq 0$ و w ، توان مختلط z^w به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$z^w = e^{w \log z},$$

که در آن $\log z$ لگاریتم چندمقداری است، به صورت:

$$\log z = \ln |z| + i(\arg z + 2n\pi), \quad n \in \mathbb{Z},$$

با $\ln |z|$ لگاریتم طبیعی اندازه $|z|$ ، و $\arg z$ آرگمان z . بنابراین، z^w چندمقداری است:

$$z^w = e^{w(\ln |z| + i(\arg z + 2n\pi))}.$$

مقدار اصلی با استفاده از لگاریتم اصلی $\text{Log} z = \ln |z| + i \text{Arg} z$ ، که در آن $\text{Arg} z \in (-\pi, \pi]$ ، به دست می‌آید:

$$z^w = e^{w \text{Log} z}.$$

۲.۵.۳ ویژگی‌ها

ویژگی‌های زیر بر توان‌های مختلط حاکم هستند، با ظرافت‌هایی به دلیل لگاریتم چندمقداری:

(آ) توان‌های صحیح: اگر $w = n$ ، یک عدد صحیح، آنگاه:

$$z^n = e^{n \log z} = e^{n(\ln |z| + i(\arg z + 2\pi k))} = |z|^n e^{in \arg z},$$

زیرا $e^{2\pi i n k} = 1$. بنابراین، z^n تک‌مقداری است، که با توان معمولی مطابقت دارد.

(ب) توان‌های گویا: اگر $w = \frac{m}{n}$ ، با $n > 0$ ، $m, n \in \mathbb{Z}$ و $\gcd(m, n) = 1$ ، آنگاه:

$$z^{m/n} = e^{\frac{m}{n}(\ln |z| + i(\arg z + 2\pi k))} = |z|^{m/n} e^{im(\arg z + 2\pi k)/n},$$

که n مقدار متمایز برای $k = 0, 1, \dots, n-1$ به دست می‌دهد، معادل ریشه‌های n -ام z^m .

(ج) قاعده ضرب: برای حالت چندمقداری:

$$z^{w_1} z^{w_2} = z^{w_1 + w_2},$$

به این معنا که مجموعه مقادیر برابر هستند. برای مقدار اصلی، این تنها در صورتی صادق

است که $\text{Arg} z^{w_1} + \text{Arg} z^{w_2} \in (-\pi, \pi]$ ، در غیر این صورت نیاز به تنظیم با $2\pi i k$ است.

(د) قاعده توان: برای حالت چندمقداری:

$$(z^w)^v = z^{wv},$$

به عنوان مجموعه مقادیر. برای مقدار اصلی، ممکن است تنظیمات لازم باشد.

(ه) مشتق: برای w ثابت، تابع $f(z) = z^w$ ، با استفاده از یک شاخه خاص، دارای مشتق:

$$\frac{d}{dz} z^w = w z^{w-1},$$

که به صورت $\frac{d}{dz} e^{w \log z} = e^{w \log z} \cdot w \cdot \frac{1}{z} = w z^{w-1}$ مشتق‌گیری شده است، معتبر در دامنه تحلیلی.

۳.۵.۳ مثال‌های گویا

مثال‌های زیر رفتار توان‌های مختلط را نشان می‌دهند:

(آ) محاسبه i^i : از آنجا که $i = e^{i\pi/2}$ ، لگاریتم اصلی:

$$\text{Log} i = \ln 1 + i \frac{\pi}{2} = i \frac{\pi}{2}.$$

بنابراین:

$$i^i = e^{i \cdot \text{Log} i} = e^{i \cdot i\pi/2} = e^{-\pi/2} \approx 0.2079,$$

۵.۳ توان‌های مختلط

یک عدد حقیقی. همه مقادیر:

$$i^i = e^{i(i(\pi/2+2\pi k))} = e^{-(\pi/2+2\pi k)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(ب) محاسبه مقدار اصلی $(-1)^{1/3}$: برای $z = -1$ ، $\text{Log}(-1) = \ln 1 + i\pi = i\pi$ ، بنابراین:

$$(-1)^{1/3} = e^{(1/3) \cdot i\pi} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

توجه: ریشه مکعبی حقیقی -1 است، که نیاز به شاخه متفاوتی دارد.

(ج) محاسبه $(1+i)^{1-i}$: برای $1+i$ ، $|1+i| = \sqrt{2}$ ، $\text{Arg}(1+i) = \pi/4$ ، پس:

$$\text{Log}(1+i) = \ln \sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \ln 2 + i\frac{\pi}{4}.$$

سپس:

$$\begin{aligned} (1+i)^{1-i} &= e^{(1-i)(\frac{1}{2} \ln 2 + i\frac{\pi}{4})} = e^{\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4} + i(-\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4})} \\ &= \sqrt{2} e^{\pi/4} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2\right) \right). \end{aligned}$$

۴.۵.۳ کاربردها و نتایج

توان‌های مختلط برای تعریف توابع مانند z^c ضروری هستند، که در حل معادلات دیفرانسیل و مدل‌سازی پدیده‌های نوسانی در پردازش سیگنال و مکانیک کوانتومی استفاده می‌شوند. یک نتیجه کلیدی این است که برای توان‌های صحیح، تابع تک‌مقداری است، در حالی که توان‌های گویا تعداد

۵.۳ توان‌های مختلط

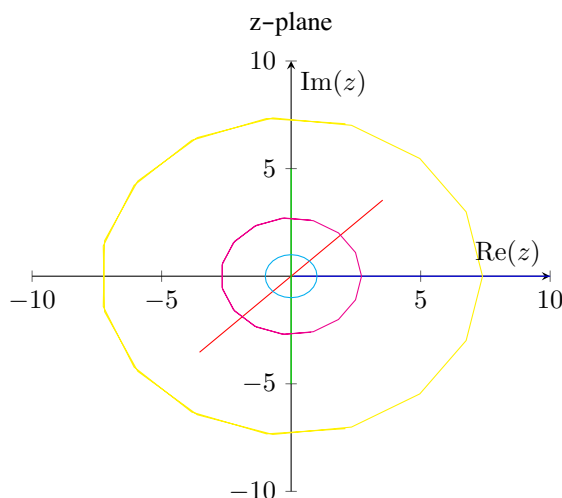
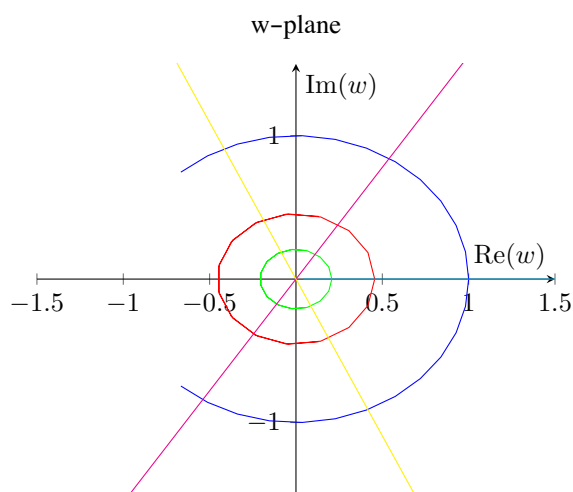
متناهی مقادیر به دست می‌دهند، که با ریشه‌های واحد همخوانی دارد.

۵.۵.۳ زمینه تاریخی

توان‌گیری مختلط در قرن هجدهم توسط لئونارد اویلر رسمی شد، که بر اساس کارش در ارتباط دادن توابع نمایی و مثلثاتی از طریق $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ بود. توسعه سطوح ریمانی توسط برنهارد ریمان در قرن نوزدهم، چارچوبی برای مدیریت ماهیت چندمقداری توان‌های مختلط فراهم کرد و کاربرد آن‌ها را در تحلیل مختلط پیش برد.

۶.۵.۳ شهود

تابع z^w ، برای w ثابت، صفحه مختلط را بر اساس ویژگی‌های لگاریتم دگرگون می‌کند. برای w حقیقی، z^w اندازه را با $|z|^w$ مقیاس می‌دهد و آرگمان را با $w \operatorname{Arg} z$ می‌چرخاند. برای $w = ib$ موهومی، $z^{ib} = e^{ib \operatorname{Log} z}$ شامل هر دو مقیاس‌دهی و چرخش است، که خطوط شعاعی را به مارپیچ‌ها و دایره‌ها را به مسیرهای شعاعی در صفحه مختلط نگاشت می‌کند، که بازتابی از تعامل اندازه و فاز است.



شکل ۸.۳: تبدیل تحت z^i . در صفحه z ، خطوط آبی، قرمز، و سبز خطوط شعاعی با زاویه‌های $\theta = 0$ ، $\frac{\pi}{4}$ ، و $\frac{\pi}{2}$ هستند، و دایره‌های فیروزه‌ای، سرخابی، و زرد به ترتیب دایره‌هایی با شعاع $|z| = 1$ ، $|z| = e$ ، و $|z| = e^2$ هستند. در صفحه w ، رنگ‌های متناظر تصاویر آن‌ها را نشان می‌دهند: کمان‌هایی روی دایره‌ها برای خطوط شعاعی و قطعاتی روی پرتوها برای دایره‌ها.

۷.۵.۳ تمرین‌ها

تمرین‌های زیر درک را تقویت می‌کنند، با راه‌حل‌های ارائه شده:

(آ) محاسبه مقدار اصلی $(1+i)^{1-i}$: راه‌حل: همان‌طور که در بالا محاسبه شد:

$$(1+i)^{1-i} = \sqrt{2}e^{\pi/4} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \right) \right).$$

(ب) نشان دهید که برای n صحیح، z^n تک‌مقداری است: راه‌حل: از آنجا که $z^n =$

$$z^n = e^{n \log z} = e^{n(\ln |z| + i(\arg z + 2\pi k))} \text{ و } e^{2\pi i n k} = 1, \text{ همه مقادیر یکسان هستند:}$$

$$|z|^n e^{in \arg z}.$$

(ج) همه مقادیر $i^{1/2}$ را بیابید: راه‌حل: از آنجا که $\log i = i(\pi/2 + 2\pi k)$

$$i^{1/2} = e^{\frac{1}{2}(i\pi/2 + 2\pi i k)} = e^{i(\pi/4 + \pi k)}.$$

۶.۳ توابع مثلثاتی

برای $k=0$: $e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ برای $k=1$: $e^{i5\pi/4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ k های بالاتر تکرار می شوند، بنابراین دو مقدار وجود دارد: $\pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$.

۸.۵.۳ تمرین های دشوارتر

(آ) شرایطی را که تحت آن $(z^w)^v = z^{wv}$ برای مقدار اصلی برقرار است، بحث کنید.

(ب) تابع $f(z) = z^i$ را کاوش کنید و تعیین کنید که در کجا تحلیلی است.

۶.۳ توابع مثلثاتی

۱.۶.۳ تعاریف

برای یک عدد مختلط z ، توابع مثلثاتی با استفاده از تابع نمایی تعریف می شوند، که همتایان حقیقی آنها را به صفحه مختلط گسترش می دهند. توابع سینوس و کسینوس عبارتند از:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

این تعاریف از فرمول اوایلر، $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ ، نشأت می گیرند و تضمین می کنند که سینوس و کسینوس توابع کلی هستند، یعنی در همه جای صفحه مختلط $\mathbb{C}$ تحلیلی می باشند. به طور متناوب، آنها را می توان از طریق سری های توانی، که برای همه z همگرا هستند، بیان کرد:

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

توابع مثلثاتی دیگر به صورت نسبت‌ها تعریف می‌شوند:

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \csc z = \frac{1}{\sin z},$$

که در جاهایی تعریف شده‌اند که مخرج‌ها صفر نباشند.

۲.۶.۳ ویژگی‌های اصلی

توابع مثلثاتی مختلط بسیاری از ویژگی‌های هم‌تایان حقیقی خود را حفظ می‌کنند، که برای دامنه مختلط تنظیم شده‌اند:

(آ) تناوب: توابع با دوره 2π دوره‌ای هستند:

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z, \quad \cos(z + 2\pi) = \cos z.$$

برای تانژانت و کوتانژانت، دوره π است: $\tan(z + \pi) = \tan z$.

(ب) زوج و فرد بودن: توابع سینوس و تانژانت فرد هستند، در حالی که کسینوس زوج است:

$$\sin(-z) = -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z, \quad \tan(-z) = -\tan z.$$

(ج) هویت فیثاغورث: هویت اساسی برقرار است:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1.$$

(د) فرمول‌های جمع: این‌ها به آرگومان‌های مختلط گسترش می‌یابند:

$$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w, \quad \cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w.$$

(ه) مشتق‌ها: مشتق‌ها مشابه حالت حقیقی هستند:

$$\frac{d}{dz} \sin z = \cos z, \quad \frac{d}{dz} \cos z = -\sin z, \quad \frac{d}{dz} \tan z = \sec^2 z,$$

که برای سینوس و کسینوس در همه جا معتبر است، و برای تانژانت در جاهایی که تعریف شده است.

(و) صفرها: صفرهای سینوس و کسینوس در:

$$\sin z = 0 \text{ when } z = n\pi, \quad \cos z = 0 \text{ when } z = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

(ز) نامحدود بودن: بر خلاف توابع مثلثاتی حقیقی، سینوس و کسینوس مختلط محدود نیستند. برای مثال، در امتداد محور موهومی:

$$\sin(iy) = i \sinh y, \quad \cos(iy) = \cosh y,$$

که در آن $\sinh y$ و $\cosh y$ به صورت نمایی با $|y| \rightarrow \infty$ رشد می‌کنند.

برای یک عدد مختلط $z = x + iy$ ، سینوس و کسینوس را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, \quad \cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y,$$

که تعامل رفتار نوسانی و هذلولی را برجسته می‌کند.

۳.۶.۳ مثال‌های گویا

مثال‌های زیر رفتار توابع مثلثاتی مختلط را نشان می‌دهند:

(آ) محاسبه $\sin i$: با استفاده از تعریف نمایی:

$$\sin i = \frac{e^{i \cdot i} - e^{-i \cdot i}}{2i} = \frac{e^{-1} - e^1}{2i} = \frac{\frac{1}{e} - e}{2i} = i \left(\frac{e - \frac{1}{e}}{2} \right) = i \sinh 1,$$

زیرا $\sinh 1 = \frac{e - e^{-1}}{2}$.

(ب) محاسبه $\cos i$:

$$\cos i = \frac{e^{i \cdot i} + e^{-i \cdot i}}{2} = \frac{e^{-1} + e^1}{2} = \frac{e + \frac{1}{e}}{2} = \cosh 1,$$

زیرا $\cosh 1 = \frac{e + e^{-1}}{2}$.

(ج) تأیید هویت فیثاغورث در $z = i$: از بالا، $\sin i = i \sinh 1$ ، $\cos i = \cosh 1$. بنابراین:

$$\sin^2 i + \cos^2 i = (i \sinh 1)^2 + (\cosh 1)^2 = -\sinh^2 1 + \cosh^2 1.$$

از آنجا که $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ داریم:

$$-\sinh^2 1 + \cosh^2 1 = 1,$$

که هویت را تأیید می‌کند.

(د) محاسبه $\sin\left(\frac{\pi}{2} + i\right)$: با استفاده از شکل $\sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + i\right) = \sin \frac{\pi}{2} \cosh 1 + i \cos \frac{\pi}{2} \sinh 1 = 1 \cdot \cosh 1 + i \cdot 0 \cdot \sinh 1 = \cosh 1.$$

۶.۳ توابع مثلثاتی

۴.۶.۳ کاربردها و نتایج

توابع مثلثاتی مختلط در چندین حوزه محوری هستند:

- تحلیل فوریه: آن‌ها پایه سری‌های فوریه را تشکیل می‌دهند، که برای نمایش سیگنال‌های دوره‌ای در پردازش سیگنال استفاده می‌شوند.
 - معادلات دیفرانسیل: آن‌ها حل معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت را، که در فیزیک و مهندسی رایج هستند، تسهیل می‌کنند.
 - سیستم‌های کنترل: آن‌ها در تحلیل پایداری سیستم و طراحی کنترل‌کننده‌ها کمک می‌کنند.
- یک نتیجه کلیدی، ارتباط آن‌ها با توابع هذلولی است:

$$\sin(iz) = i \sinh z, \quad \cos(iz) = \cosh z,$$

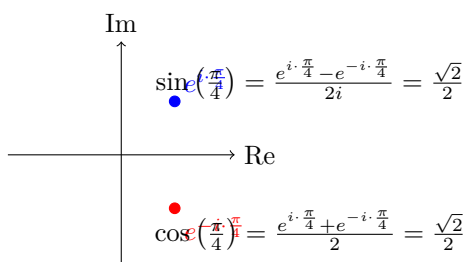
که هویت‌های مثلثاتی و هذلولی را پیوند می‌دهد و کاربرد آن‌ها را در مدل‌سازی ریاضی افزایش می‌دهد.

۵.۶.۳ زمینه تاریخی

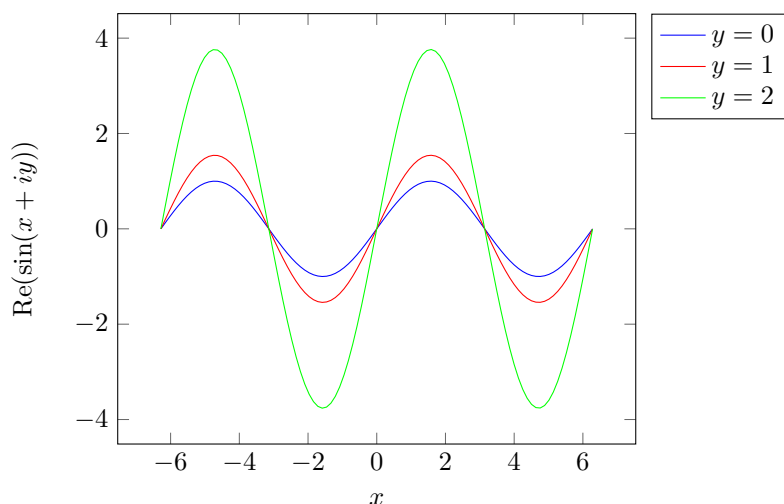
گسترش توابع مثلثاتی به متغیرهای مختلط توسط لئونارد اویلر در قرن هجدهم پیشگام شد. فرمول او، $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ ، ارتباط عمیقی بین توابع نمایی و مثلثاتی برقرار کرد و با پل زدن بین جبر و هندسه، تحلیل مختلط را متحول ساخت. این توسعه، زمینه‌ساز کاربردهای مدرن در مهندسی

۶.۶.۳ شهود

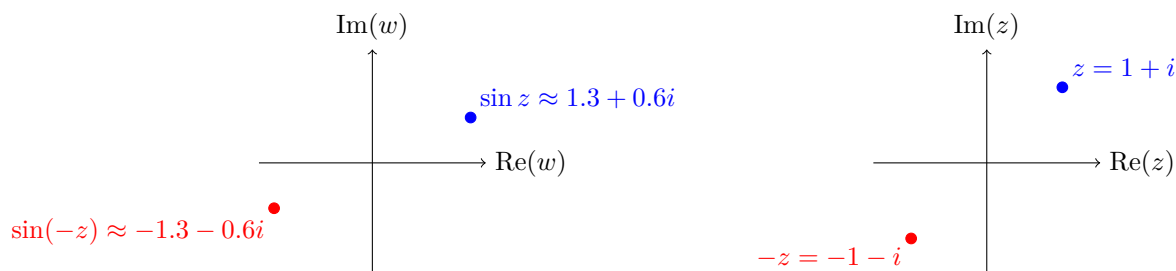
در صفحه مختلط، تابع سینوس خطوط افقی را به منحنی‌های هذلولی و خطوط عمودی را به امواج نوسانی تبدیل می‌کند. برای $z = x + iy$ ، بخش حقیقی $\sin x \cosh y$ نوسان سینوسی را با رشد نمایی ترکیب می‌کند، در حالی که بخش موهومی $\cos x \sinh y$ یک جابجایی فاز مدوله شده توسط توابع هذلولی را معرفی می‌کند. در امتداد محور موهومی، $\sin(iy) = i \sinh y$ ، که کاملاً موهومی است و به صورت نمایی رشد می‌کند، که نامحدود بودن تابع را نشان می‌دهد. به طور مشابه، کسینوس رفتار مشابهی از خود نشان می‌دهد و صفحه مختلط را به تعاملی پویا از نوسان و رشد نگاشت می‌کند.



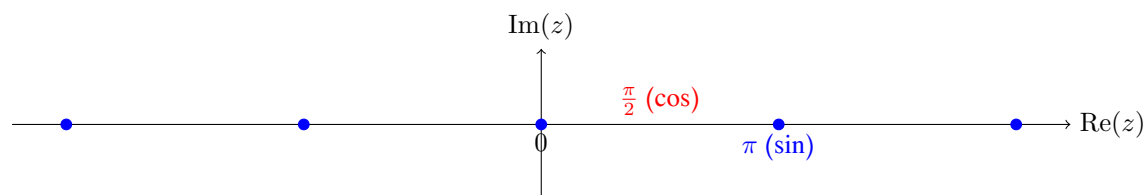
شکل ۹.۳: Illustration of the definition of $\cos z$ and $\sin z$ using exponential functions for $z = \frac{\pi}{4}$. The points e^{iz} and e^{-iz} are shown in the complex plane. $\cos z$ and $\sin z$ form to combine they how demonstrating calculations with plane. complex



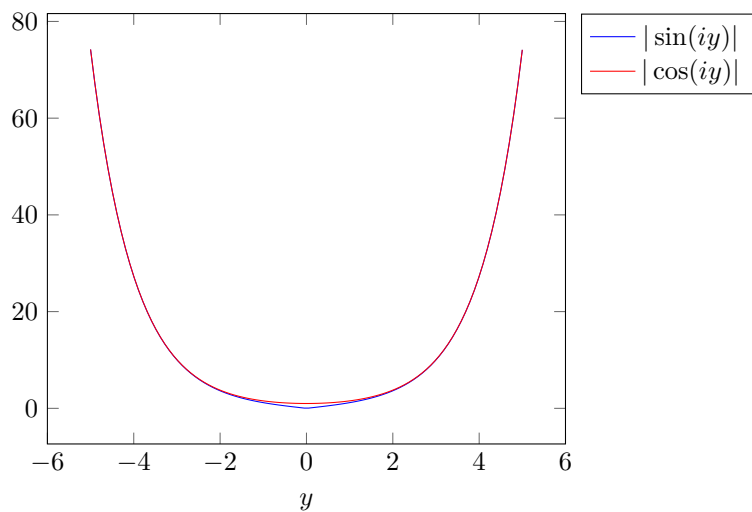
شکل ۱۰.۳: y fixed for $\sin(x + iy)$ of part Real : $y = 2$ and $y = 1$, $y = 0$ for shown are Plots . 2π period with x in periodicity demonstrating y with changes amplitude the how illustrating



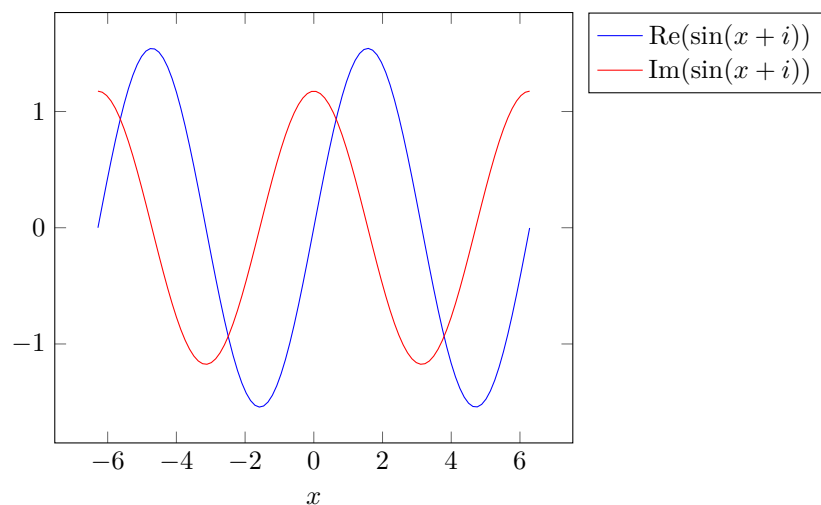
شکل ۱۱.۳: Parity of $\sin z$: $\sin(-z) = -\sin z$, $z = 1 + i$ for shown by plotting z , $-z$, $\sin z$ and $\sin(-z)$ in the complex plane.



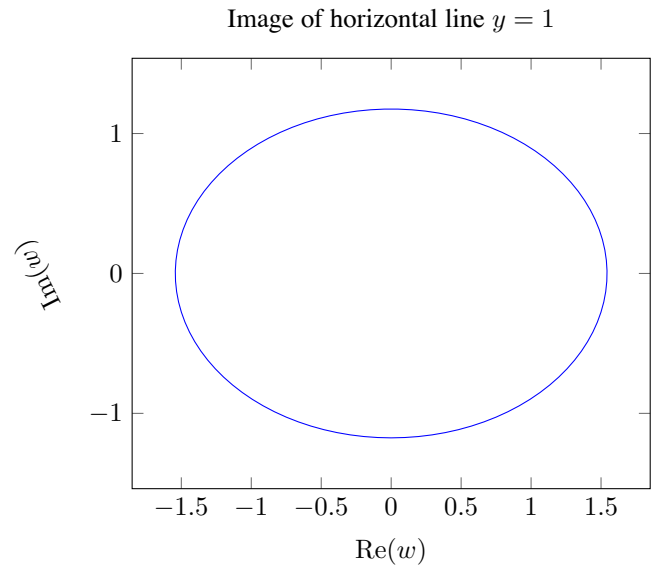
شکل ۱۲.۳: Zeros of $\sin z$ (blue) at $z = n\pi$ and $\cos z$ (red) at $z = \frac{\pi}{2} + n\pi$ for n integers plotted in the complex plane.



شکل ۱۳.۳: Magnitude of functions $\sin(iy)$ and $\cos(iy)$ showing their exponential growth and thus unboundedness in the complex plane.



شکل ۱۴.۳: Real and imaginary parts of $\sin(x+i)$ illustrating the oscillatory behavior modulated by hyperbolic functions.



۷.۶.۳ تمرین‌ها

(آ) محاسبه $\sin\left(\frac{\pi}{2} + i\right)$: راه حل: همان طور که در بالا محاسبه شد:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + i\right) = \cosh 1 \approx 1.5431.$$

$$\sin(iz) = \frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i} = \frac{e^{-z} - e^z}{2i} = i \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2} \right) = i \sinh z,$$

زیرا $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$.

۷.۳ توابع هذلولی

(ج) همه جواب‌های $\cos z = 0$ را بیابید: راه‌حل: قرار دهید $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0$ پس $e^{iz} = -e^{-iz}$ یا $e^{2iz} = -1$. بنابراین:

$$2iz = i\pi + 2\pi ik, \quad k \in \mathbb{Z},$$

که منجر به:

$$z = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(د) تأیید $\tan(i) = i \tanh 1$: راه‌حل: محاسبه:

$$\tan i = \frac{\sin i}{\cos i} = \frac{i \sinh 1}{\cosh 1} = i \frac{\sinh 1}{\cosh 1} = i \tanh 1,$$

$$\text{زیرا } \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

۸.۶.۳ تمرین‌های دشوارتر

مسائل زیر درک عمیق‌تری را به چالش می‌کشند و بدون راه‌حل ارائه شده‌اند:

(آ) بسط سری لوران $\tan z$ را حول $z = 0$ تعیین کنید.

(ب) همه جواب‌های $\sin z = i$ را بیابید و آن‌ها را به صورت $x + iy$ بیان کنید.

۷.۳ توابع هذلولی

توابع هذلولی برای یک متغیر مختلط z به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z},$$

$$z = \frac{1}{\cosh z}, \quad z = \frac{1}{\sinh z}.$$

این توابع کلی هستند، یعنی در همه جای صفحه مختلط $\mathbb{C}$ تحلیلی‌اند، زیرا از توابع نمایی کلی تشکیل شده‌اند. همچنین می‌توان آن‌ها را از طریق سری‌های توانی، که برای همه z همگرا هستند، بیان کرد:

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

توابع هذلولی مختلط ویژگی‌های بسیاری را با همتایان حقیقی خود به اشتراک می‌گذارند، که برای دامنه مختلط تنظیم شده‌اند:

(آ) تناوب: توابع با دوره $2\pi i$ دوره‌ای هستند:

$$\sinh(z + 2\pi i) = \sinh z, \quad \cosh(z + 2\pi i) = \cosh z.$$

برای $\tanh z$ و $\coth z$ ، دوره πi است: $\tanh(z + \pi i) = \tanh z$.

(ب) تقارن: سینوس هذلولی و تانژانت هذلولی فرد هستند، در حالی که کسینوس هذلولی زوج است:

$$\sinh(-z) = -\sinh z, \quad \cosh(-z) = \cosh z, \quad \tanh(-z) = -\tanh z.$$

(ج) هویت‌ها: هویت‌های کلیدی شامل:

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1,$$

$$1 - \tanh^2 z = \frac{1}{\cosh^2 z}, \quad \coth^2 z - 1 = \frac{1}{\sinh^2 z}.$$

(د) فرمول‌های جمع:

$$\sinh(z + w) = \sinh z \cosh w + \cosh z \sinh w,$$

$$\cosh(z + w) = \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w.$$

(ه) مشتق‌ها: مشتق‌ها مشابه حالت حقیقی هستند:

$$\frac{d}{dz} \sinh z = \cosh z, \quad \frac{d}{dz} \cosh z = \sinh z, \quad \frac{d}{dz} \tanh z = 1 - \tanh^2 z,$$

که برای $\sinh z$ و $\cosh z$ در همه جا معتبر است، و برای $\tanh z$ در جاهایی که تعریف شده است.

(و) صفرها: صفرها در:

$$\sinh z = 0 \text{ when } z = in\pi, \quad \cosh z = 0 \text{ when } z = i\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

(ز) نامحدود بودن: بر خلاف توابع مثلثاتی حقیقی، توابع هذلولی مختلط محدود نیستند. برای $z = iy$

$$\sinh(iy) = i \sin y, \quad \cosh(iy) = \cos y,$$

اما در امتداد محور حقیقی، $\sinh x$ و $\cosh x$ به صورت نمایی رشد می‌کنند.

(ح) رابطه با توابع مثلثاتی:

$$\sinh(iz) = i \sin z, \quad \cosh(iz) = \cos z, \quad \tanh(iz) = i \tan z,$$

$$\sin(iz) = i \sinh z, \quad \cos(iz) = \cosh z.$$

(ط) بیان برای $z = x + iy$:

$$\sinh z = \sinh x \cosh y + i \cosh x \sinh y,$$

$$\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y.$$

۳.۷.۳ مثال‌های گویا

مثال‌های زیر رفتار توابع هذلولی مختلط را نشان می‌دهند:

(آ) محاسبه $\sinh i$: با استفاده از تعریف:

$$\begin{aligned}\sinh i &= \frac{e^i - e^{-i}}{2} = \frac{\cos 1 + i \sin 1 - \cos(-1) - i \sin(-1)}{2} \\ &= \frac{\cos 1 + i \sin 1 - \cos 1 + i \sin 1}{2} = i \sin 1 \approx i \cdot 0.8415.\end{aligned}$$

(ب) محاسبه $\cosh i$:

$$\begin{aligned}\cosh i &= \frac{e^i + e^{-i}}{2} = \frac{\cos 1 + i \sin 1 + \cos(-1) + i \sin(-1)}{2} \\ &= \frac{\cos 1 + i \sin 1 + \cos 1 - i \sin 1}{2} = \cos 1 \approx 0.5403.\end{aligned}$$

(ج) تأیید $\cosh^2 i - \sinh^2 i = 1$: از بالا، $\sinh i = i \sin 1$ ، $\cosh i = \cos 1$. بنابراین:

$$\cosh^2 i - \sinh^2 i = (\cos 1)^2 - (i \sin 1)^2 = \cos^2 1 - (-\sin^2 1) = \cos^2 1 + \sin^2 1 = 1.$$

(د) محاسبه $\sinh(1+i)$: با استفاده از $\sinh(x+iy) = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$:

$$\sinh(1+i) = \sinh 1 \cos 1 + i \cosh 1 \sin 1$$

$$\approx (1.1752 \cdot 0.5403) + i(1.5431 \cdot 0.8415) \approx 0.6346 + i1.2985.$$

۴.۷.۳ کاربردها و نتایج

توابع هذلولی مختلط در موارد زیر نقش کلیدی دارند:

- معادلات دیفرانسیل: در حل معادلاتی مانند $f''(z) = f(z)$ استفاده می‌شوند، که در فیزیک و مهندسی کاربرد دارند.
- فیزیک: پدیده‌هایی در نسبیت خاص (تحولات لورنتز) و مکانیک کوانتومی را مدل می‌کنند.
- مهندسی: در نظریه خطوط انتقال، ولتاژ و جریان را مدل می‌کنند، مانند:

$$V(x, t) = V_0 \cosh \left(\frac{t - x/c}{\sqrt{LC}} \right).$$

یک نتیجه کلیدی، رابطه آن‌ها با توابع مثلثاتی است:

$$\sinh(iz) = i \sin z, \quad \cosh(iz) = \cos z,$$

که هویت‌ها و ویژگی‌های مثلثاتی و هذلولی را پیوند می‌دهد و کاربرد آن‌ها را در تحلیل مختلط افزایش می‌دهد.

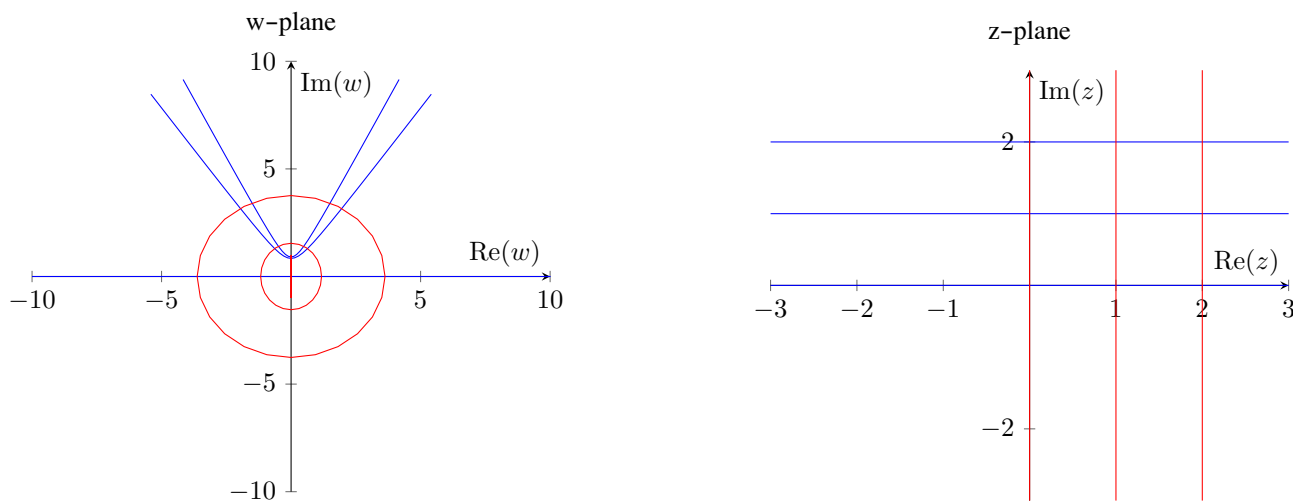
۵.۷.۳ زمینه تاریخی

توابع هذلولی در قرن هجدهم توسط وینچنزو ریکاتی، که در سال ۱۷۵۷ نمادهای $\sinh$ و $\cosh$ را معرفی کرد، و یوهان هاینریش لامبرت، که ویژگی‌های آن‌ها را توسعه داد، رسمی شدند. ارتباط آن‌ها

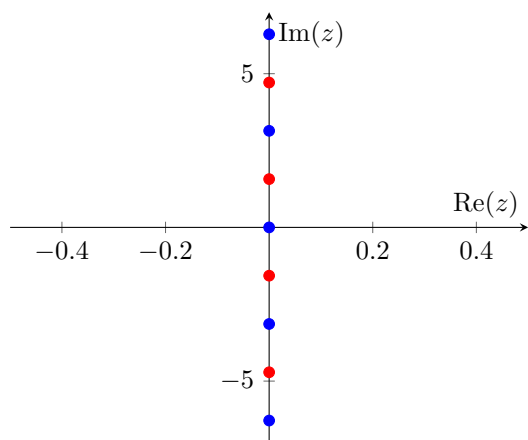
با توابع مثلثاتی توسط لئونارد اویلر برقرار شد، که فرمول $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ او گسترش آن‌ها به صفحه مختلط را تسهیل کرد و نقش هندسی هذلول‌ها را به دایره‌ها مرتبط ساخت.

۶.۷.۳ شهود

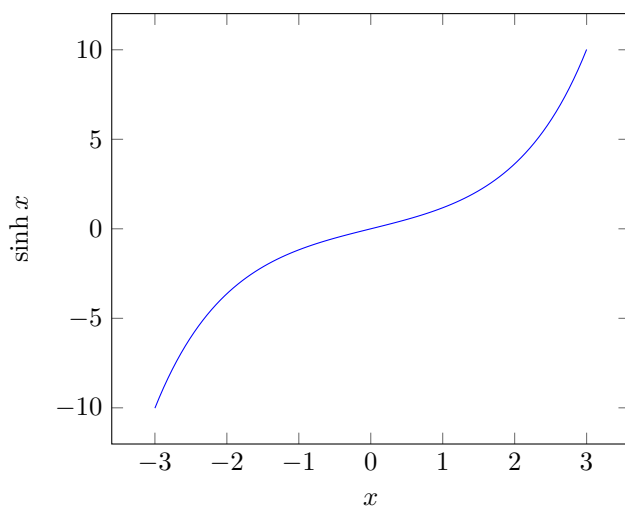
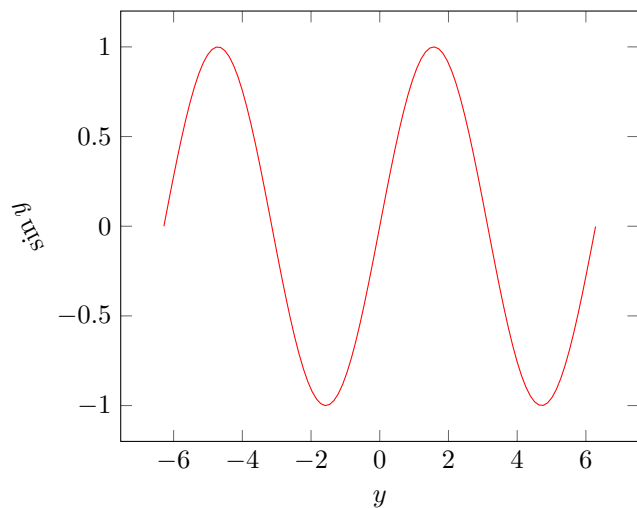
در صفحه مختلط، $\sinh z$ محور حقیقی را به یک تابع فرد با رشد نمایی نگاشت می‌کند، در حالی که $\cosh z$ زوج است و در $z = 0$ کمینه دارد. در امتداد محور موهومی، $\sinh(iy) = i \sin y$ کاملاً موهومی و نوسانی است، و $\cosh(iy) = \cos y$ حقیقی و دوره‌ای است. برای $z = x + iy$ ، بخش حقیقی $\sinh x \cos y$ رشد هذلولی را با نوسان ترکیب می‌کند، و بخش موهومی $\cosh x \sin y$ نوسانی با جابجایی فاز را معرفی می‌کند. این نگاشت پویا، با تناوب $2\pi i$ ، رشد نمایی را در جهت‌های خاصی نشان می‌دهد.



شکل ۶.۳: Mapping of the w -plane (Left) and z -plane (Right). The w -plane shows the image of the z -plane under the mapping $w = \sinh(z)$. The z -plane shows the original grid. The mapping is defined by the equations $\left(\frac{u}{\cos d}\right)^2 + \left(\frac{v}{\sin d}\right)^2 \approx 1$ for $y = d$ (horizontal lines) and $\left(\frac{v}{\sin y}\right)^2 - \left(\frac{u}{\cos y}\right)^2 \approx 1$ for $x = c$ (vertical lines).



شکل ۷.۳: Zeros of $\sinh z$ (blue) at $z = in\pi$ and $\cosh z$ (red) at $z = i(\frac{\pi}{2} + n\pi)$ in the complex plane.



شکل ۷.۳: Left: $\sin y$ (oscillatory behavior, $i \sin y$ representing $\text{Im}(\sinh(iy))$) Right: $\sinh x$ (exponential growth showing x real for $\sinh x$, e.g., $\sinh 3 \approx 10$).

تمرین‌های زیر درک را تقویت می‌کنند، با راه‌حل‌های ارائه شده:

(آ) محاسبه $\cosh(2i)$: راه‌حل: با استفاده از $\cosh(iz) = \cos z$:

$$\cosh(2i) = \cos 2 \approx -0.4161.$$

(ب) یافتن $\frac{d}{dz} \tanh z$: راه‌حل: با استفاده از قاعده کسری:

$$\frac{d}{dz} \tanh z = \frac{d}{dz} \left(\frac{\sinh z}{\cosh z} \right) = \frac{\cosh^2 z - \sinh^2 z}{\cosh^2 z} = \frac{1}{\cosh^2 z} = {}^2 z.$$

(ج) تأیید $\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$ برای $z_1 = i, z_2 = i$:

راه‌حل: سمت چپ: $\sinh(2i) = i \sin 2 = i(2 \sin 1 \cos 1)$. سمت راست: $\sinh i =$

$$\cosh i = \cos 1, i \sin 1$$

$$\sinh i \cosh i + \cosh i \sinh i = 2(i \sin 1)(\cos 1) = i(2 \sin 1 \cos 1).$$

هویت برقرار است.

(د) یافتن همه جواب‌های $\sinh z = 0$: راه‌حل: قرار دهید $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = 0$ پس

$$e^z = e^{-z} \text{ یا } e^{2z} = 1. \text{ بنابراین:}$$

$$2z = 2\pi ik, \quad z = i\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

۸.۳ توابع معکوس مثلثاتی و هذلولی

۸.۷.۳ تمرین‌های دشوارتر

(آ) حل $\cosh z = 0$ ، با بیان جواب‌ها به صورت $x + iy$.

(ب) تعیین بسط سری لوران z حول $z = 0$.

۸.۳ توابع معکوس مثلثاتی و هذلولی

۱.۸.۳ تعاریف

توابع معکوس مثلثاتی و هذلولی به عنوان معکوس‌های توابع مثلثاتی و هذلولی مربوطه تعریف می‌شوند، که به صفحه مختلط گسترش یافته‌اند. به دلیل ماهیت دوره‌ای این توابع، معکوس‌های آن‌ها چندمقداری هستند و نیاز به شاخه‌های اصلی دارند که از طریق لگاریتم‌ها تعریف می‌شوند.

توابع معکوس مثلثاتی

برای یک عدد مختلط z ، توابع معکوس مثلثاتی اصلی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

• سینوس معکوس $(\sin^{-1} z)$:

$$\sin^{-1} z = -i \log \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right),$$

که در آن $\sqrt{1 - z^2}$ و $\log$ چندمقداری هستند، با شاخه‌های اصلی انتخاب شده برای تضمین تحلیلی بودن.

۸.۳ توابع معکوس مثلثاتی و هذلولی

• کسینوس معکوس $(\cos^{-1} z)$:

$$\cos^{-1} z = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} z = -i \log \left(z + i\sqrt{1 - z^2} \right).$$

• تانژانت معکوس $(\tan^{-1} z)$:

$$\tan^{-1} z = \frac{i}{2} \log \left(\frac{i + z}{i - z} \right).$$

توابع معکوس هذلولی

به طور مشابه، توابع معکوس هذلولی با استفاده از لگاریتم‌ها تعریف می‌شوند:

• سینوس هذلولی معکوس $(\sinh^{-1} z)$:

$$\sinh^{-1} z = \log \left(z + \sqrt{z^2 + 1} \right).$$

• کسینوس هذلولی معکوس $(\cosh^{-1} z)$:

$$\cosh^{-1} z = \log \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right).$$

• تانژانت هذلولی معکوس $(\tanh^{-1} z)$:

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + z}{1 - z} \right).$$

این تعاریف شامل لگاریتم مختلط، $\log z = \ln |z| + i(\arg z + 2n\pi)$ ، و ریشه‌های مربع هستند که چندمقداری‌اند و برای تعریف توابع تک‌مقداری، نیاز به برش‌های شاخه دارند.

۸.۳ توابع معکوس مثلثاتی و هذلولی

۲.۸.۳ ویژگی‌های اصلی

ماهیت چندمقداری و برش‌های شاخه

ماهیت چندمقداری این توابع از تناوب توابع مثلثاتی و هذلولی ناشی می‌شود. برای مثال، $\sin z$ با دوره 2π دوره‌ای است، که $\sin^{-1} z$ را چندمقداری می‌کند. شاخه‌های اصلی با محدود کردن آرگمان لگاریتم و انتخاب شاخه‌های خاص برای ریشه‌های مربع تعریف می‌شوند. برش‌های شاخه متداول عبارتند از:

- برای $\sin^{-1} z$ و $\cos^{-1} z$: در امتداد محور حقیقی از $-\infty$ تا -1 و از 1 تا ∞ .

- برای $\tan^{-1} z$: در امتداد محور موهومی از $-i\infty$ تا $-i$ و از i تا $i\infty$.

- برای $\sinh^{-1} z$: در امتداد محور موهومی از $-i\infty$ تا $-i$ و از i تا $i\infty$.

- برای $\cosh^{-1} z$: در امتداد محور حقیقی از $-\infty$ تا -1 و از 1 تا ∞ .

- برای $\tanh^{-1} z$: در امتداد محور حقیقی از $-\infty$ تا -1 و از 1 تا ∞ .

این برش‌های شاخه تضمین می‌کنند که توابع در صفحه برش خورده تحلیلی باشند.

دامنه‌ها و بردها

شاخه‌های اصلی دارای بردهای خاصی برای تضمین تک‌مقداری بودن هستند:

- $-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Re}(\sin^{-1} z) \leq \frac{\pi}{2}$: $\sin^{-1} z$

- $0 \leq \operatorname{Re}(\cos^{-1} z) \leq \pi$: $\cos^{-1} z$

- $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re}(\tan^{-1} z) < \frac{\pi}{2}$: $\tan^{-1} z$

۸.۳ توابع معکوس مثلثاتی و هذلولی

$$\bullet \sinh^{-1} z : -\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Im}(\sinh^{-1} z) \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\bullet \cosh^{-1} z : 0 \leq \operatorname{Im}(\cosh^{-1} z) \leq \pi$$

$$\bullet \tanh^{-1} z : -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im}(\tanh^{-1} z) < \frac{\pi}{2}$$

مشتق‌ها

مشتق‌ها از عبارات لگاریتمی مشتق می‌شوند و در دامنه‌های تحلیلی معتبر هستند:

• توابع معکوس مثلثاتی:

$$\frac{d}{dz} \sin^{-1} z = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \quad \frac{d}{dz} \cos^{-1} z = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \quad \frac{d}{dz} \tan^{-1} z = \frac{1}{1+z^2}.$$

• توابع معکوس هذلولی:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \sinh^{-1} z &= \frac{1}{\sqrt{z^2+1}}, & \frac{d}{dz} \cosh^{-1} z &= \frac{1}{\sqrt{z^2-1}} \quad (|z| > 1), \\ \frac{d}{dz} \tanh^{-1} z &= \frac{1}{1-z^2} \quad (|z| < 1). \end{aligned}$$

روابط

یک رابطه کلیدی، توابع معکوس مثلثاتی و هذلولی را به هم متصل می‌کند:

$$\sin^{-1} z = -i \sinh^{-1}(iz), \quad \cos^{-1} z = i \cosh^{-1} z, \quad \tan^{-1} z = -i \tanh^{-1}(iz).$$

این‌ها از تعاریف و روابط $\cos(iz) = \cosh z$, $\sin(iz) = i \sinh z$ پیروی می‌کنند.

۸.۳ توابع معکوس مثلثاتی و هذلولی

۳.۸.۳ مثال‌های گویا

(آ) محاسبه $\sin^{-1}(i)$: با استفاده از تعریف:

$$\sin^{-1}(i) = -i \log(i \cdot i + \sqrt{1 - i^2}) = -i \log(-1 + \sqrt{1 + 1}) = -i \log(-1 + \sqrt{2}).$$

از آنجا که $-1 + \sqrt{2} \approx 0.414 > 0$ ، لگاریتم اصلی:

$$\log(-1 + \sqrt{2}) = \ln(\sqrt{2} - 1) + i \cdot 0.$$

با توجه به اینکه $\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$ ، پس $\ln(\sqrt{2} - 1) = -\ln(\sqrt{2} + 1)$ بنابراین:

$$\sin^{-1}(i) = -i \cdot (-\ln(\sqrt{2} + 1)) = i \ln(\sqrt{2} + 1) \approx i \cdot 0.8814.$$

(ب) محاسبه $\tanh^{-1}(0)$:

$$\tanh^{-1}(0) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+0}{1-0}\right) = \frac{1}{2} \log(1) = 0.$$

(ج) محاسبه $\cosh^{-1}(1)$:

$$\cosh^{-1}(1) = \log(1 + \sqrt{1^2 - 1}) = \log(1 + 0) = \log 1 = 0.$$

(د) تأیید مشتق $\tan^{-1} z$: با استفاده از تعریف $\tan^{-1} z = \frac{i}{2} \log\left(\frac{i+z}{i-z}\right)$:

$$\frac{d}{dz} \tan^{-1} z = \frac{i}{2} \cdot \frac{1}{\frac{i+z}{i-z}} \cdot \frac{(i-z) \cdot 1 - (i+z) \cdot (-1)}{(i-z)^2}$$

۸.۳ توابع معکوس مثلثاتی و هذلولی

$$= \frac{i}{2} \cdot \frac{i-z}{i+z} \cdot \frac{i-z+i+z}{(i-z)^2} = \frac{i}{2} \cdot \frac{2i}{(i-z)(i+z)} = \frac{1}{1+z^2}.$$

۴.۸.۳ کاربردها و نتایج

توابع معکوس مثلثاتی و هذلولی در موارد زیر حیاتی هستند:

- حساب انتگرال: در انتگرال‌هایی مانند $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \tanh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ و $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$
- فیزیک و مهندسی: در مدل‌سازی انتشار موج، انتقال حرارت، و مدارهای الکتریکی، که متغیرهای مختلط تحلیل را ساده می‌کنند.
- حل معادلات: حل معادلاتی مانند $\sin z = w$ ، که در آن $z = \sin^{-1} w$.

یک نتیجه کلیدی، رابطه بین توابع معکوس مثلثاتی و هذلولی است، مانند

$$\sin^{-1} z = -i \sinh^{-1}(iz)$$

که چارچوب نظری آن‌ها را یکپارچه می‌کند.

۵.۸.۳ زمینه تاریخی

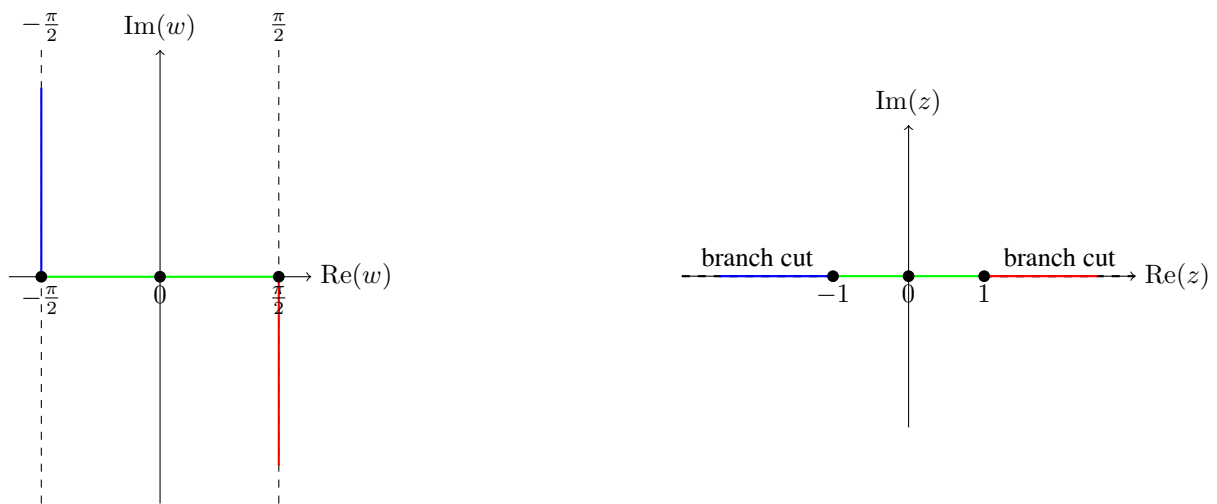
توسعه توابع معکوس مثلثاتی و هذلولی در دامنه مختلط در قرن هجدهم با کار لئونارد اویلر در ارتباط دادن توابع نمایی به توابع مثلثاتی از طریق $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ پدیدار شد. در قرن نوزدهم، آگوستین-لویی کوشی و برنهارد ریمان توابع چندمقداری و برش‌های شاخه را رسمی کردند و چارچوب دقیقی برای این معکوس‌ها فراهم آوردند که کاربرد آن‌ها را در تحلیل مختلط افزایش

۸.۳ توابع معکوس مثلثاتی و هذلولی

داد.

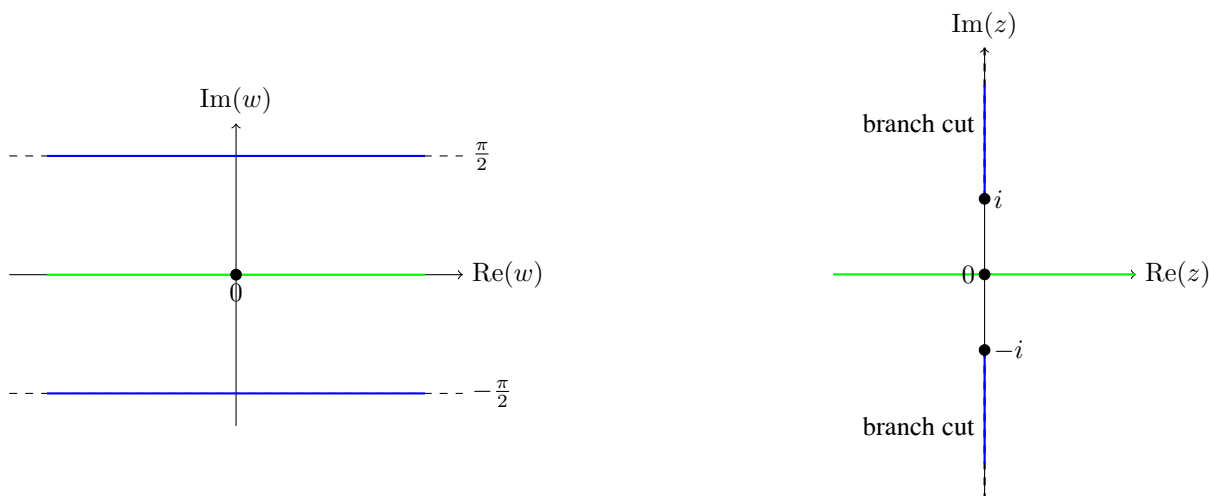
۶.۸.۳ شهود

در صفحه مختلط، $\sin^{-1} z$ صفحه مختلط را به یک نوار، معمولاً $-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Re} w \leq \frac{\pi}{2}$ ، نگاشت می‌دهد، با برش‌های شاخه در امتداد محور حقیقی از $-\infty$ تا -1 و از 1 تا ∞ ، که در آن تابع تحلیلی نیست. برای z روی محور حقیقی بین -1 و 1 ، $\sin^{-1} z$ حقیقی است، شبیه به سینوس معکوس حقیقی. برای $\sinh^{-1} z$ ، نگاشت به یک نوار $-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Im} w \leq \frac{\pi}{2}$ است، با برش‌های شاخه روی محور موهومی. این نگاشت‌ها ماهیت لگاریتمی را منعکس می‌کنند، خطوط و نواحی را به منحنی‌های مختلط تبدیل می‌کنند، با برش‌های شاخه که تک‌مقداری بودن را تضمین می‌کنند.



شکل ۹.۳: Mapping under $\arcsin z$ of the principal branch. Left: z -plane with branch cuts along $[-\infty, -1]$ and $[1, \infty)$ on the real axis. Right: w -plane showing the strip $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} w < \frac{\pi}{2}$. The axis real is colored: $x > 1$ for red, $-1 < x < 1$ for green, $x < -1$ for blue. The axis real to maps segment green The. $u = -\frac{\pi}{2}$ to blue, $u = \frac{\pi}{2}$ to red, and $u < 0$.

۸.۳ توابع معکوس مثلثاتی و هذلولی



شکل ۲۰.۳: Mapping of the principal branch of the inverse sine function. Left: z -plane showing the principal branch strip $-\frac{\pi}{2} < \text{Im } w < \frac{\pi}{2}$ in green. Right: w -plane showing the principal branch strip $-\frac{\pi}{2} < \text{Im } w < \frac{\pi}{2}$ in green and the branch cuts on the imaginary axis for $|v| > 1$ in blue.

۷.۸.۳ تمرین‌ها

(آ) محاسبه $\cos^{-1}(2)$: راه حل: با استفاده از $\cos^{-1} z = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} z$

$$\sin^{-1}(2) = -i \log(2i + \sqrt{1-4}) = -i \log(2i + i\sqrt{3}) = -i \log(i(2 + \sqrt{3})).$$

از آنجا که $\log(ia) = \ln a + i\frac{\pi}{2}$ برای $a > 0$:

$$\log(i(2 + \sqrt{3})) = \ln(2 + \sqrt{3}) + i\frac{\pi}{2},$$

پس:

$$\sin^{-1}(2) = -i \left(\ln(2 + \sqrt{3}) + i\frac{\pi}{2} \right) = i \ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{\pi}{2}.$$

۸.۳ توابع معکوس مثلثاتی و هذلولی

بنابراین:

$$\cos^{-1}(2) = \frac{\pi}{2} - \left(i \ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{\pi}{2} \right) = \pi - i \ln(2 + \sqrt{3}) \approx 3.1416 - i \cdot 1.3170.$$

(ب) یافتن $\frac{d}{dz} \sinh^{-1} z$: راه حل: با استفاده از تعریف $\sinh^{-1} z = \log(z + \sqrt{z^2 + 1})$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \sinh^{-1} z &= \frac{1}{z + \sqrt{z^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 + 1}} \right) \\ &= \frac{1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 + 1}}}{z + \sqrt{z^2 + 1}} = \frac{\sqrt{z^2 + 1} + z}{(z + \sqrt{z^2 + 1})\sqrt{z^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{z^2 + 1}}. \end{aligned}$$

(ج) تأیید $\sin^{-1}(iz) = -i \sinh^{-1} z$: راه حل: محاسبه:

$$\sin^{-1}(iz) = -i \log(i \cdot iz + \sqrt{1 - (iz)^2}) = -i \log(-z + \sqrt{1 + z^2}).$$

برای $\sinh^{-1} z = \log(z + \sqrt{z^2 + 1})$:

$$-i \sinh^{-1} z = -i \log(z + \sqrt{z^2 + 1}).$$

از آنجا که $\sqrt{z^2 + 1} = \sqrt{-(1 + z^2)}$ ، شاخه را به طور مناسب انتخاب کنید. عبارات تحت انتخاب‌های شاخه سازگار مطابقت دارند و هویت را تأیید می‌کنند.

۸.۸.۳ تمرین‌های دشوارتر

(آ) حل $\sin^{-1} z = i$ برای z ، با بیان جواب‌ها به صورت $x + iy$.

(ب) تعیین برش‌های شاخه برای $\cosh^{-1} z$ و توصیف شاخه اصلی آن.

نگاشت توسط تبدیلات خطی

۱.۴ تبدیلات خطی

۱.۱.۴ تعریف

در تحلیل مختلط، یک تبدیل خطی تابعی به شکل زیر است:

$$w = az + b,$$

که در آن z متغیر مختلط، a و b اعداد مختلط، و $a \neq 0$ است. این تبدیل، که به عنوان تبدیل آفین نیز شناخته می‌شود، ترکیبی از مقیاس‌بندی، چرخش و انتقال صفحه مختلط است. شرط $a \neq 0$ تضمین می‌کند که تبدیل معکوس‌پذیر باشد و آن را از توابع ثابت متمایز می‌کند.

۲.۱.۴ ویژگی‌های اصلی

تبدیلات خطی دارای چندین ویژگی اساسی هستند که آن‌ها را در تحلیل مختلط ضروری می‌سازند:

(آ) دوسویی: از آنجا که $a \neq 0$ ، تبدیل معکوس‌پذیر است، با معکوس داده شده توسط:

$$z = \frac{w - b}{a}.$$

این امر نگاشتی یک به یک و پوشا از صفحه مختلط به خود را تضمین می‌کند.

(ب) همدیسی: تبدیل همدیس است، یعنی زوایا را حفظ می‌کند، زیرا مشتق آن:

$$\frac{dw}{dz} = a \neq 0,$$

در همه جا غیر صفر است، که شرایط همدیسی را برآورده می‌کند.

(ج) حفظ خطوط و دایره‌ها: تبدیلات خطی، خطوط راست را به خطوط راست و دایره‌ها را

به دایره‌ها نگاشت می‌کنند. این امر از ماهیت خطی آن‌ها ناشی می‌شود، که هم‌راستایی و

شکل‌های دایره‌ای را تحت مقیاس‌بندی، چرخش و انتقال حفظ می‌کند.

(د) ترکیب: ترکیب دو تبدیل خطی، $T_1(z) = a_1z + b_1$ و $T_2(z) = a_2z + b_2$ ، به صورت

زیر است:

$$T_2(T_1(z)) = a_2(a_1z + b_1) + b_2 = (a_2a_1)z + (a_2b_1 + b_2),$$

که خود یک تبدیل خطی دیگر است، نشان‌دهنده این است که مجموعه تبدیلات خطی تحت ترکیب، یک گروه تشکیل می‌دهد.

(ه) صفحه مختلط گسترش‌یافته: تبدیل، صفحه مختلط گسترش‌یافته $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ را به خود نگاشت می‌کند، به طوری که $z \rightarrow \infty$ به $w \rightarrow \infty$ نگاشت می‌شود.

۳.۱.۴ تفسیر هندسی

تبدیلات خطی را می‌توان به مقیاس‌بندی، چرخش و انتقال تجزیه کرد، که هر یک اثرات هندسی متمایزی دارند:

- انتقال: برای $w = z + b$ ، هر نقطه در صفحه مختلط به اندازه بردار b جابجا می‌شود. برای مثال، اگر $b = 1 + i$ ، صفحه به سمت راست ۱ واحد و به بالا ۱ واحد حرکت می‌کند، در حالی که شکل و جهت‌گیری شکل‌ها حفظ می‌شود.
- چرخش و مقیاس‌بندی: برای $w = az$ ، که در آن $a = re^{i\theta}$ با $r > 0$ و $\theta \in \mathbb{R}$ ، تبدیل صفحه را به ضریب r مقیاس‌بندی می‌کند و آن را به اندازه زاویه θ حول مبدأ می‌چرخاند. برای مثال، اگر $a = i = e^{i\pi/2}$ ، صفحه ۹۰ درجه خلاف جهت عقربه‌های ساعت می‌چرخد.
- تبدیل کلی: تابع $w = az + b$ این اثرات را ترکیب می‌کند: ابتدا مقیاس‌بندی و چرخش توسط a ، سپس انتقال توسط b . این را می‌توان به صورت تغییر اندازه و جهت‌گیری صفحه،

و سپس جابجایی به موقعیت جدید تجسم کرد.

این تبدیلات، ساختار هندسی خطوط و دایره‌ها را حفظ می‌کنند. برای مثال، یک خط $ax+by+c=0$ در صفحه z به خط دیگری در صفحه w نگاشت می‌شود، و یک دایره $|z-c|=r$ به دایره‌ای با مرکز $ac+b$ و شعاع $|a|r$ نگاشت می‌شود.

۴.۱.۴ مثال‌های گویا

مثال‌های زیر رفتار تبدیلات خطی را نشان می‌دهند:

(آ) انتقال: در نظر بگیرید $T(z) = z + 1$. این کل صفحه مختلط را به سمت راست ۱ واحد جابجا می‌کند. برای مثال:

$$T(0) = 1, \quad T(i) = 1 + i.$$

دایره واحد $|z|=1$ به $|w-1|=1$ نگاشت می‌شود، که دایره‌ای با مرکز ۱ و شعاع ۱ است.

(ب) چرخش: برای $T(z) = iz$ ، که در آن $i = e^{i\pi/2}$ ، صفحه ۹۰ درجه خلاف جهت عقربه‌های ساعت می‌چرخد:

$$T(1) = i, \quad T(i) = i \cdot i = -1.$$

محور حقیقی $y=0$ به محور موهومی $u=0$ نگاشت می‌شود.

(ج) مقیاس‌بندی: برای $T(z) = 2z$ ، صفحه به ضریب ۲ مقیاس‌بندی می‌شود:

$$T(1+i) = 2(1+i) = 2+2i.$$

دایره واحد $|z|=1$ به $|w|=2$ نگاشت می‌شود، که دایره‌ای با شعاع ۲ و مرکز مبدأ است.

(د) تبدیل کلی: برای $T(z) = (1+i)z + 2$ ، که در آن $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ ، تبدیل به ضریب $\sqrt{2}$ مقیاس‌بندی می‌کند، ۴۵ درجه می‌چرخاند، و ۲ واحد جابجا می‌کند:

$$T(0) = 2, \quad T(1) = (1+i) \cdot 1 + 2 = 3+i.$$

۵.۱.۴ کاربردها و نتایج

تبدیلات خطی به دلایل متعددی در تحلیل مختلط بنیادی هستند:

- نگاشت همدیس: به عنوان ساده‌ترین نگاشت‌های همدیس، آن‌ها زوایا را حفظ می‌کنند و برای تبدیل دامنه‌های پیچیده به دامنه‌های ساده‌تر استفاده می‌شوند، که حل مسائل مقدار مرزی در فیزیک و مهندسی، مانند دینامیک سیالات و الکترواستاتیک، را تسهیل می‌کند.
- ساده‌سازی دامنه‌ها: آن‌ها مناطق پیچیده را به مناطق ساده‌تر نگاشت می‌کنند، که در تحلیل معادله لاپلاس یا نظریه پتانسیل کمک می‌کند.
- ساختار گروهی: مجموعه تبدیلات خطی تحت ترکیب، یک گروه تشکیل می‌دهد، ویژگی‌ای که پایه نگاشت‌های پیشرفته‌تر مانند تبدیلات موبیوس است.
- کاربردها در فیزیک: در مدل‌سازی سیستم‌های فیزیکی، مانند میدان‌های الکترومغناطیسی، استفاده می‌شوند، که در آن تبدیلات شرایط مرزی را ساده می‌کنند.

۱.۴ تبدیلات خطی

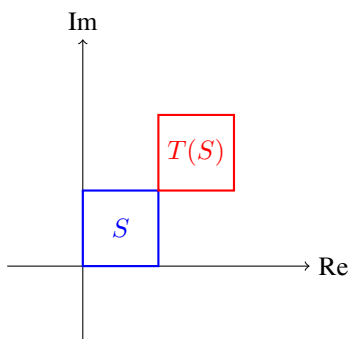
یک نتیجه کلیدی این است که تبدیلات خطی تنها توابع کلی (تحلیلی در همه جا) هستند که از $\mathbb{C}$ به $\mathbb{C}$ دوسو هستند، که نقش منحصر به فرد آنها را در تحلیل مختلط برجسته می‌کند.

۶.۱.۴ زمینه تاریخی

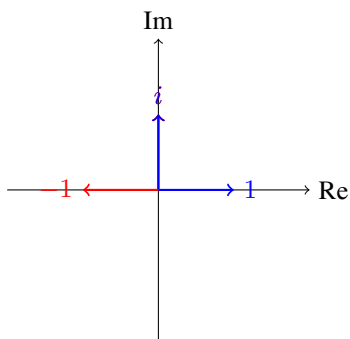
تبدیلات خطی در تحلیل مختلط در قرن نوزدهم به عنوان بخشی از توسعه نظریه توابع پدیدار شدند. ریاضیدانانی مانند کارل فریدریش گاوس، برنهارد ریمان و آگوستین-لویی کوشی به درک نگاشت‌های هم‌مدیس کمک کردند، که تبدیلات خطی به عنوان مثال‌های بنیادی آنها بودند. کارهای آنها پایه‌ای برای کاربردهای مدرن در تحلیل مختلط و زمینه‌های مرتبط فراهم کرد.

۷.۱.۴ شهود

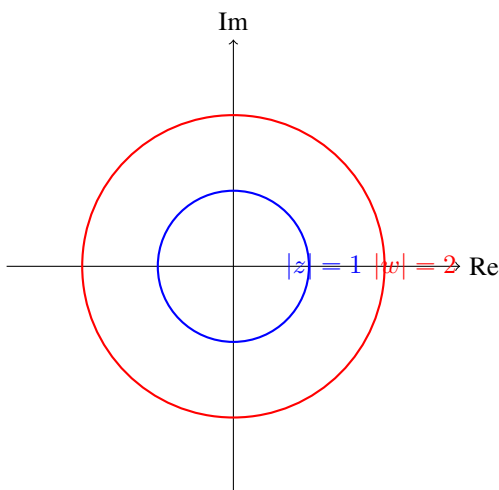
صفحه مختلط را به عنوان یک بوم انعطاف‌پذیر تصور کنید. یک انتقال $w = z + b$ بوم را به طور یکنواخت جابجا می‌کند، در حالی که همه شکل‌ها و جهت‌گیری‌ها را حفظ می‌کند. برای مثال، یک شبکه از مربع‌ها به اندازه بردار b جابجا می‌شود و ساختار خود را حفظ می‌کند. یک چرخش و مقیاس‌بندی $w = az$ ، که در آن $a = re^{i\theta}$ ، بوم را به اندازه r کشیده و به زاویه θ حول مبدأ می‌چرخاند. یک خط عبوری از مبدأ به زاویه جدیدی می‌چرخد، و یک دایره با مرکز مبدأ به شعاع جدیدی مقیاس‌بندی می‌شود. تبدیل کلی $w = az + b$ این اثرات را ترکیب می‌کند: ابتدا کشیدن و چرخاندن، سپس جابجایی به موقعیت جدید. برای مثال، دایره واحد $|z| = 1$ تحت $w = 2z + 1$ به دایره‌ای با شعاع ۲ و مرکز ۱ تبدیل می‌شود، که با $|w - 1| = 2$ توصیف می‌شود.



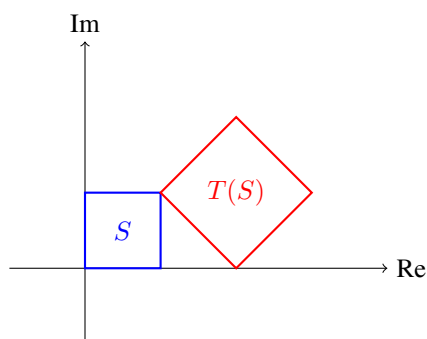
شکل ۱.۴: انتقال: مربع S به اندازه $b = 1 + i$ جابجا می‌شود تا $T(S)$ تولید شود، جایی که $w = z + (1 + i)$.



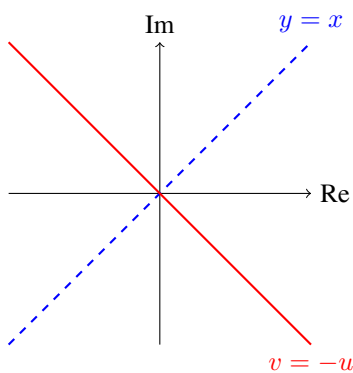
شکل ۲.۴: چرخش: تبدیل $w = iz$ نقاط را 90° در جهت خلاف عقربه‌های ساعت حول مبدا می‌چرخاند.



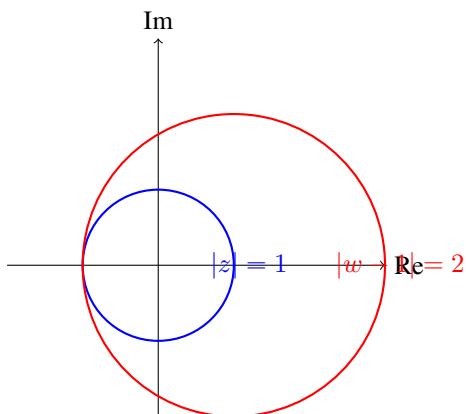
شکل ۳.۴: مقیاس‌بندی: تبدیل $w = 2z$ دایره واحد $|z| = 1$ را به دایره‌ای با شعاع ۲، یعنی $|w| = 2$ ، مقیاس‌بندی می‌کند.



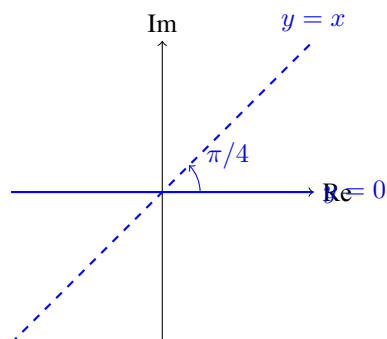
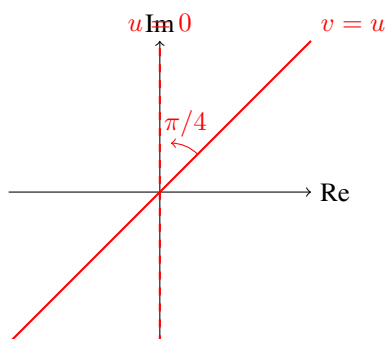
شکل ۴.۴: تبدیل عمومی: تبدیل $w = (1 + i)z + 2$ مقیاس را به اندازه $\sqrt{2}$ تغییر می‌دهد، به اندازه $\pi/4$ می‌چرخاند، و به اندازه ۲ جابجا می‌کند، و مربع S را به $T(S)$ نگاشت می‌دهد.



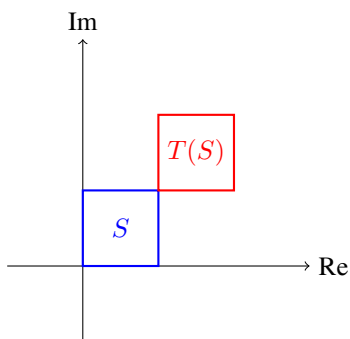
شکل ۵.۴: حفظ خطوط: خط $y = x$ تحت تبدیل $w = iz$ به $v = -u$ نگاشت می‌شود و ساختار خطی آن حفظ می‌شود.



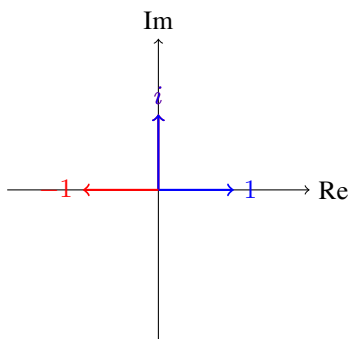
شکل ۶.۴: حفظ دایره‌ها: دایره واحد $|z| = 1$ تحت تبدیل $w = 2z + 1$ به دایره‌ای با شعاع ۲ و مرکز ۱، یعنی $|w - 1| = 2$ ، نگاشت می‌شود.



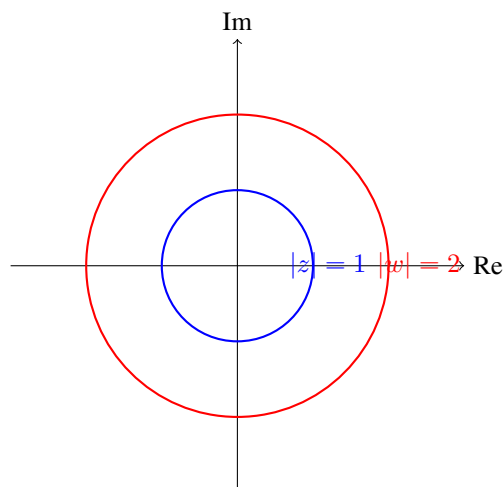
شکل ۷.۴: هم‌نگاری: تبدیل $w = (1 + i)z$ زاویه $\pi/4$ بین محور حقیقی و خط $y = x$ را حفظ می‌کند و آن‌ها را به ترتیب به خط $v = u$ و محور موهومی نگاشت می‌دهد.



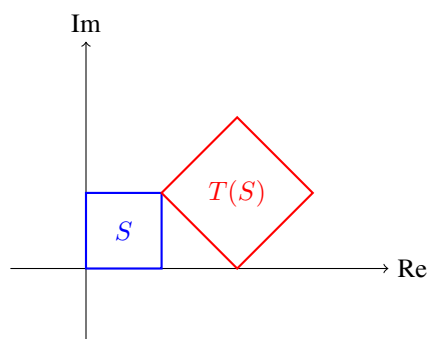
شکل ۸.۴: انتقال: مربع S به اندازه $b = 1 + i$ جابجا می‌شود تا $T(S)$ تولید شود، جایی که $w = z + (1 + i)$.



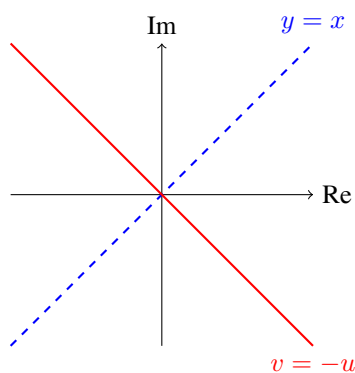
شکل ۹.۴: چرخش: تبدیل $w = iz$ نقاط را 90° در جهت خلاف عقربه‌های ساعت حول مبدا می‌چرخاند.



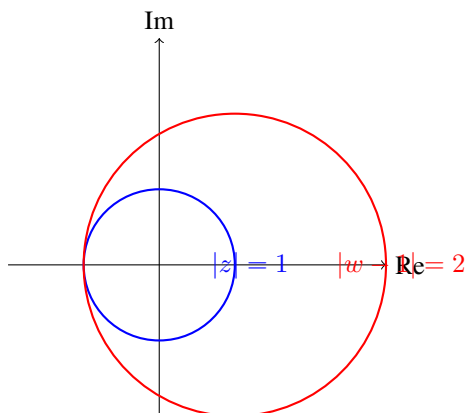
شکل ۱۰.۴: مقیاس‌بندی: تبدیل $w = 2z$ دایره واحد $|z| = 1$ را به دایره‌ای با شعاع ۲، $|w| = 2$ ، مقیاس می‌کند.



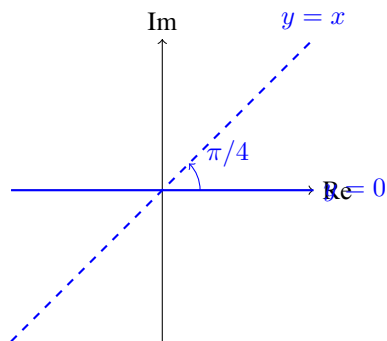
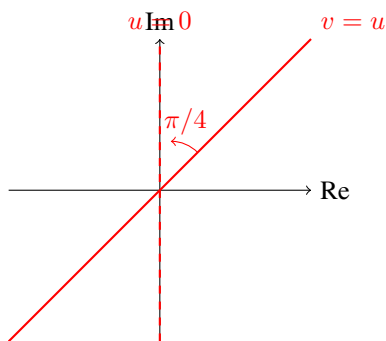
شکل ۱۱.۴: تبدیل عمومی: تبدیل $w = (1 + i)z + 2$ مقیاس را به اندازه $\sqrt{2}$ تغییر می‌دهد، به اندازه $\pi/4$ می‌چرخاند، و به اندازه ۲ انتقال می‌دهد، و مربع S را به $T(S)$ نگاشت می‌کند.



شکل ۱۲.۴: حفظ خطوط: خط $y = x$ تحت تبدیل $w = iz$ به $v = -u$ نگاشت می‌شود و ساختار خطی آن حفظ می‌شود.



شکل ۱۳.۴: حفظ دایره‌ها: دایره واحد $|z| = 1$ تحت تبدیل $w = 2z + 1$ به دایره‌ای با شعاع ۲ و مرکز ۱، $|w - 1| = 2$ ، نگاشت می‌شود.



شکل ۱۴.۴: هم‌ریختی: تبدیل $w = (1 + i)z$ زاویه $\pi/4$ بین محور حقیقی و خط $y = x$ را حفظ می‌کند و آن‌ها را به ترتیب به خط $v = u$ و محور موهومی نگاشت می‌دهد.

تمرین‌های زیر درک را تقویت می‌کنند، با راه‌حل‌های ارائه شده برای وضوح:

(آ) تصویر خط $y = 2x$ را تحت تبدیل $w = (1 + i)z$ بیابید. راه‌حل: بگذارید $z = x + 2xi = x(1 + 2i)$ سپس:

$$w = (1+i)z = (1+i)x(1+2i) = x(1+i)(1+2i) = x(1+2i+i-2) = x(-1+3i).$$

بنابراین، $w = u + iv = x(-1 + 3i)$ ، که نشان می‌دهد $u = -x$ ، $v = 3x$ پس، $v = -3u$ و تصویر، خط $v = -3u$ است.

(ب) تبدیل خطی‌ای را تعیین کنید که $z_1 = 0$ را به $w_1 = 1$ و $z_2 = 1$ را به $w_2 = i$ نگاشت کند. راه‌حل: برای $T(z) = az + b$ ، نیاز داریم $T(0) = b = 1$ و $T(1) = a \cdot 1 + b = i$ از آنجا که $b = 1$ ، پس $a + 1 = i$ ، بنابراین $a = i - 1$. بنابراین:

$$T(z) = (i - 1)z + 1.$$

(ج) نشان دهید که $T(z) = \frac{z-i}{z+i}$ یک تبدیل خطی به شکل $az + b$ نیست. راه‌حل: تابع $T(z) = \frac{z-i}{z+i}$ یک تبدیل موبیوس است، به شکل $\frac{az+b}{cz+d}$ با $a = 1$ ، $b = -i$ ، $c = 1$ ، $d = i$. این تابع نمی‌تواند به صورت $az + b$ بیان شود، که تأیید می‌کند در این زمینه تبدیل خطی نیست.

۲.۴ تبدیل $w = \frac{1}{z}$

۹.۱.۴ تمرین‌های دشوارتر

- (آ) ثابت کنید که هر تبدیل خطی $T(z) = az + b$ با $a \neq 0$ همدیس است.
- (ب) همه تبدیلات خطی‌ای را بیابید که دیسک واحد $|z| < 1$ را به خود نگاشت کنند.

۲.۴ تبدیل $w = \frac{1}{z}$

۱.۲.۴ تعریف

تبدیل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$w = \frac{1}{z},$$

که در آن z یک متغیر مختلط است و w تصویر آن در صفحه مختلط است. این نگاشت، که به عنوان برگشت شناخته می‌شود، در $z = 0$ تعریف نشده است، $z = 0$ را به $w = \infty$ و $z = \infty$ را به $w = 0$ نگاشت می‌کند. این تبدیل، یک مورد خاص از تبدیلات موبیوس است، که با سادگی و اثرات هندسی عمیق خود مشخص می‌شود.

۲.۲.۴ ویژگی‌های اصلی

تبدیل $w = \frac{1}{z}$ دارای چندین ویژگی اساسی است که در نقش آن در تحلیل مختلط حائز اهمیت هستند:

(آ) برگشت و انعکاس: برای یک عدد مختلط $z = re^{i\theta}$ ، که در آن $r = |z|$ و $\theta = \arg z$ ، تبدیل به:

$$w = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

می‌شود. این امر اندازه را از r به $\frac{1}{r}$ برمی‌گرداند و آرگمان را از θ به $-\theta$ انعکاس می‌دهد.
(ب) نگاشت شکل‌های هندسی: تبدیل، دایره‌های عمومی (خطوط یا دایره‌ها در صفحه مختلط) را به دایره‌های عمومی نگاشت می‌کند:

- خطوطی که از مبدأ عبور نمی‌کنند، به دایره‌هایی که از مبدأ عبور می‌کنند نگاشت می‌شوند.
- دایره‌هایی که از مبدأ عبور نمی‌کنند، به دایره‌های دیگری که از مبدأ عبور نمی‌کنند نگاشت می‌شوند.
- خطوطی که از مبدأ عبور می‌کنند، به خطوط دیگری که از مبدأ عبور می‌کنند نگاشت می‌شوند.
- دایره‌هایی که از مبدأ عبور می‌کنند، به خطوطی که از مبدأ عبور نمی‌کنند نگاشت می‌شوند.

این ویژگی از حفظ دایره‌های عمومی توسط تبدیلات موبیوس ناشی می‌شود.

(ج) همدیس بودن: تبدیل همدیس است، یعنی زوایا را در همه نقاطی که تعریف شده است ($z \neq 0$) حفظ می‌کند. مشتق آن:

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{1}{z^2} \neq 0 \text{ برای } z \neq 0,$$

که حفظ زاویه را تضمین می‌کند.

(د) نقاط ثابت: نقاطی که $w = z$ را برآورده می‌کنند، یعنی $z = \frac{1}{z}$ ، منجر به $z^2 = 1$ می‌شود، بنابراین $z = \pm 1$. این نقاط ثابت تبدیل هستند.

(ه) نگاشت مناطق: تبدیل مناطق خاص را به صورت زیر نگاشت می‌کند:

- نصف‌النهار بالا ($\text{Im}(z) > 0$) به نصف‌النهار پایین ($\text{Im}(w) < 0$).
- داخل دیسک واحد ($|z| < 1$) به خارج آن ($|w| > 1$)، و بالعکس.
- دایره واحد ($|z| = 1$) به خودش از طریق همزادسازی: $w = \bar{z}$.

۳.۲.۴ تفسیر هندسی

تبدیل $w = \frac{1}{z}$ را می‌توان به عنوان ترکیب برگشت در دایره واحد و همزادسازی پیچیده درک کرد. برای $z = x + iy$ داریم:

$$w = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

این امر نقاط داخل دایره واحد ($|z| < 1$) را به نقاط خارج از آن ($|w| > 1$) نگاشت می‌کند، و بالعکس، در حالی که نقاط روی دایره واحد ($|z| = 1$) از طریق همزادسازی به خودشان نگاشت می‌شوند. خطوط و دایره‌ها به خطوط یا دایره‌ها تبدیل می‌شوند، با رفتارهای خاص بسته به موقعیت

۲.۴ تبدیل $w = \frac{1}{z}$

آنها نسبت به مبدأ.

۴.۲.۴ مثال‌های گویا

مثال‌های زیر رفتار تبدیل را نشان می‌دهند:

(آ) نگاشت یک خط: خط عمودی $x = 1$ ، یعنی $z = 1 + iy, y \in \mathbb{R}$ سپس:

$$w = \frac{1}{1 + iy} = \frac{1 - iy}{1 + y^2} = \frac{1}{1 + y^2} - i \frac{y}{1 + y^2}.$$

فرض کنید $w = u + iv$ ، پس $u = \frac{1}{1+y^2}, v = -\frac{y}{1+y^2}$ برای یافتن تصویر، محاسبه کنید:

$$\begin{aligned} (u-0.5)^2 + v^2 &= \left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(-\frac{y}{1+y^2} \right)^2 = \frac{\left(1 - \frac{1+y^2}{2} \right)^2 + y^2}{(1+y^2)^2} = \frac{\frac{(1-y^2)^2}{4} + y^2}{(1+y^2)^2} \\ &= \frac{1 + y^4 - 2y^2 + 4y^2}{4(1+y^2)^2} = \frac{1 + y^4 + 2y^2}{4(1+y^2)^2} = \frac{(1+y^2)^2}{4(1+y^2)^2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

پس، تصویر، دایره $|w - 0.5| = 0.5$ است، که از مبدأ عبور می‌کند ($w = 0$) وقتی $y \rightarrow \pm\infty$.

(ب) نگاشت یک دایره: دایره $|z| = 2$ برای $z = 2e^{i\theta}$

$$w = \frac{1}{2e^{i\theta}} = \frac{1}{2}e^{-i\theta},$$

که دایره $|w| = \frac{1}{2}$ را توصیف می‌کند، که دور مبدأ قرار دارد و از مبدأ عبور نمی‌کند.

(ج) نگاشت نصف‌النهار بالا: برای $z = x + iy, y > 0$:

$$w = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

بخش موهومی: $v = -\frac{y}{x^2 + y^2} < 0$ ، پس نصف‌النهار بالا به نصف‌النهار پایین نگاشت می‌شود.

(د) نگاشت دایره واحد: برای $z = e^{i\theta}$:

$$w = \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \bar{z},$$

که دایره واحد را به خودش از طریق همزادسازی پیچیده نگاشت می‌کند.

۵.۲.۴ کاربردها و نتایج

تبدیل $w = \frac{1}{z}$ در چندین حوزه کلیدی است:

- معادله لاپلاس: با ساده‌سازی مسائل مقدار مرزی توسط نگاشت دامنه‌های پیچیده به دامنه‌های ساده‌تر، مانند تبدیل خارج از یک دیسک به داخل آن، کمک می‌کند.

۲.۴ تبدیل $w = \frac{1}{z}$

- الکترواستاتیک: در روش تصاویر برای یافتن بارهای تصویری برای رساناها با قارچ‌های کروی یا استوانه‌ای، پتانسیل را ساده می‌کند.
- دینامیک سیالات: با مدل‌سازی جریان سیالات حول موانع توسط تغییر شکل دامنه جریان، ویژگی‌های فیزیکی کلیدی را حفظ می‌کند.

یک نتیجه کلیدی، این است که $w = \frac{1}{z}$ یک تبدیل موبیوس از نوع $\frac{az+b}{cz+d}$ با $a = 0$ ، $b = 1$ ، $c = 1$ ، $d = 0$ است، که ویژگی‌هایی مانند حفظ نسبت‌های متقاطع و قابلیت ترکیب با دیگر تبدیلات موبیوس را به ارث می‌برد. توانایی آن برای تبدیل مناطق داخلی و خارجی در مسائل شامل دامنه‌های نامتناهی ارزشمند است.

۶.۲.۴ زمینه تاریخی

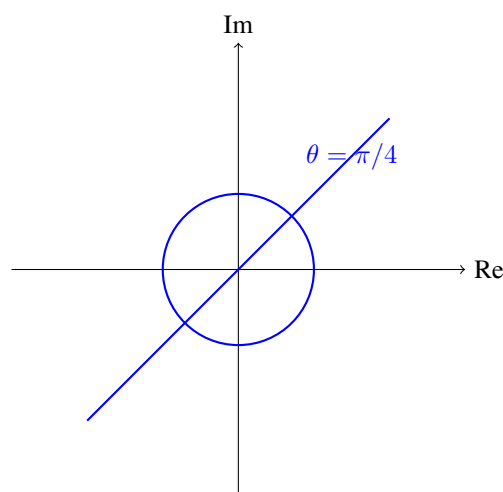
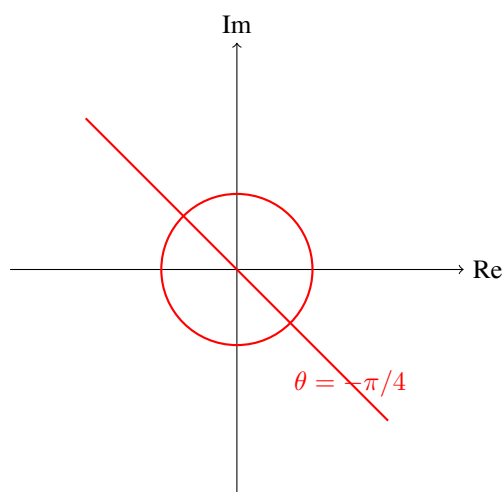
تبدیل $w = \frac{1}{z}$ یک مورد خاص از تبدیلات موبیوس است، که توسط اوگست فردیناند موبیوس در قرن نوزدهم معرفی شد. کارهای او، که تبدیلات خطی را گسترش داد، چارچوبی برای درک تغییرات هندسی در صفحه مختلط فراهم کرد. مشارکت‌های ریاضیدانانی مانند برنهارد ریمان و آگوستین-لویی کوشی اهمیت این تبدیلات را در تحلیل مختلط و کاربردهای آن تثبیت کرد.

۷.۲.۴ شهود

صفحه مختلط را به صورت یک بوم انعطاف‌پذیر تصور کنید، که توسط تبدیل $w = \frac{1}{z}$ شکل می‌گیرد. نقاط نزدیک به مبدأ (مانند $z = 0.5$) به فواصل بزرگ (مانند $w = 2$) پرتاب می‌شوند، در حالی که نقاط دور (مانند $z = 2$) نزدیک (مانند $w = 0.5$) کشیده می‌شوند. خطوط (مانند $x = 1$)

۲.۴ تبدیل $w = \frac{1}{z}$

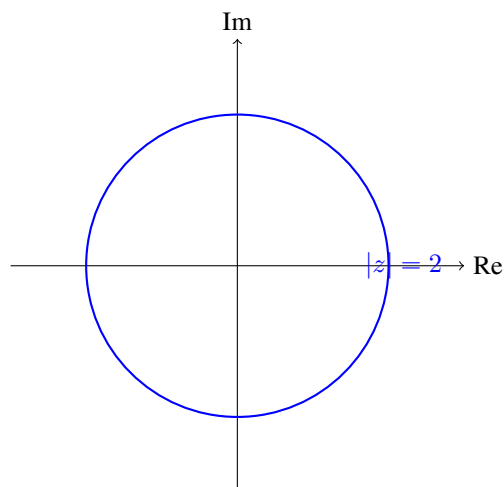
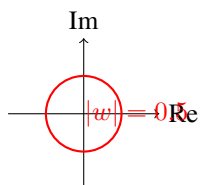
به دایره‌ها (مانند $|w - 0.5| = 0.5$) تبدیل می‌شوند، در حالی که دایره‌ها (مانند $|z| = 2$) به دایره‌های کوچکتر (مانند $|w| = \frac{1}{2}$) تبدیل می‌شوند. دایره واحد ($|z| = 1$) از طریق همزادساز پیچیده به خودش نگاشت می‌شود. این تغییر شکل پویا توانایی تبدیل برای مسیرهای خطی به منحنی‌ها و بالعکس را نشان می‌دهد.



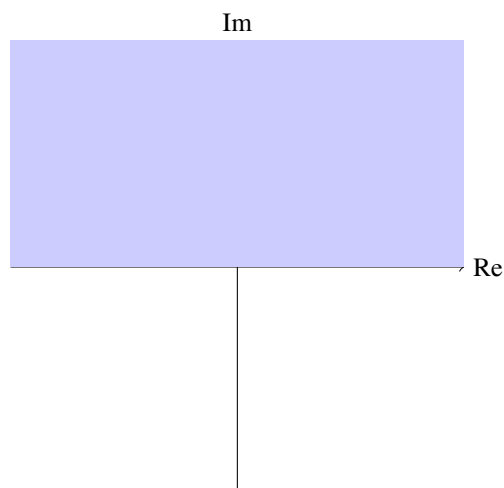
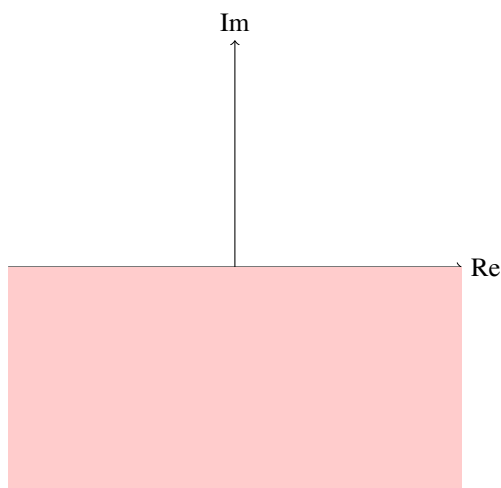
شکل ۱۵.۴: تبدیل $w = \frac{1}{z}$ دایره واحد $|z| = 1$ را به خودش نگاشت می‌کند و خط شعاعی $y = x$ (زاویه $\theta = \pi/4$) را به $v = -u$ (زاویه $\theta = -\pi/4$) نگاشت می‌دهد، که نشان‌دهنده وارونگی اندازه‌ها و بازتاب زوایا است.



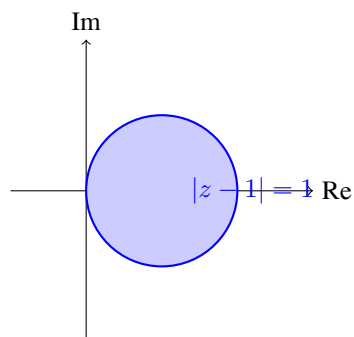
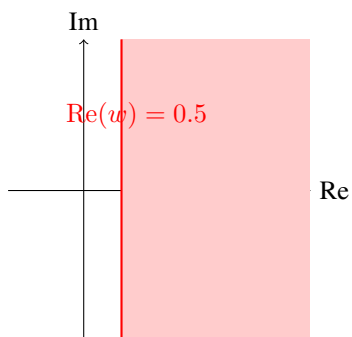
شکل ۱۶.۴: خط عمودی $\text{Re}(z) = 1$ در صفحه z به دایره $|w - 0.5| = 0.5$ در صفحه w نگاشت می‌شود، که از مبدا می‌گذرد.



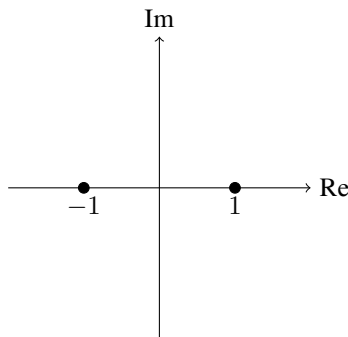
شکل ۱۷.۴: دایره $|z| = 2$ در صفحه z به دایره $|w| = 0.5$ در صفحه w نگاشت می‌شود.



شکل ۱۸.۴: نیم‌صفحه بالایی $\text{Im}(z) > 0$ تحت تبدیل $w = \frac{1}{z}$ به نیم‌صفحه پایینی $\text{Im}(w) < 0$ نگاشت می‌شود.



شکل ۱۹.۴: دیسک $|z - 1| < 1$ به نیم‌صفحه $\text{Re}(w) > 0.5$ نگاشت می‌شود، و مرز $|z - 1| = 1$ به $\text{Re}(w) = 0.5$ نگاشت می‌شود.



شکل ۲.۴: نقاط ثابت تبدیل $w = \frac{1}{z}$: $z = -1$ و $z = 1$

۸.۲.۴ تمرین‌ها

تمرین‌های زیر درک را تقویت می‌کنند، با راه‌حل‌های ارائه شده برای وضوح:

(آ) تصویر خط $y = x$ را تحت $w = \frac{1}{z}$ بیابید. راه‌حل: برای $z = x + ix = x(1 + i)$

$$w = \frac{1}{x(1 + i)} = \frac{1 - i}{2x}.$$

فرض کنید $w = u + iv$ ، پس $u = \frac{1}{2x}$ ، $v = -\frac{1}{2x}$. بنابراین، $v = -u$ ، و تصویر، خط $v = -u$ است.

(ب) تصویر دیسک $|z - 1| < 1$ را تحت $w = \frac{1}{z}$ تعیین کنید. راه‌حل: دیسک $|z - 1| < 1$

در مرکز $z = 1$ با شعاع ۱ است، که از مبدأ روی مرز خود عبور می‌کند. مرز $|z - 1| = 1$

به خط $\text{Re}(w) = \frac{1}{2}$ نگاشت می‌شود. نقاط داخل دیسک، مانند $z = 0.5$ ($|0.5 - 1| = 0.5$)

$0.5 < 1$)، به $w = 2$ نگاشت می‌شوند، با $\frac{1}{2} < \text{Re}(w) = 2$. بنابراین، دیسک به

نیم‌نهار $\text{Re}(w) > \frac{1}{2}$ نگاشت می‌شود.

۲.۴ تبدیل $w = \frac{1}{z}$

(ج) نشان دهید که $w = \frac{1}{z}$ محور حقیقی را به خودش نگاشت می‌کند. راه‌حل: برای $x \neq 0, x \in \mathbb{R}, z = x + 0i$

$$w = \frac{1}{x},$$

که حقیقی است. در صفحه مختلط گسترش یافته، $z = 0$ به $w = \infty$ و $z = \infty$ به $w = 0$ نگاشت می‌شود، هر دو روی محور حقیقی گسترش یافته. بنابراین، محور حقیقی به خودش نگاشت می‌شود.

(د) تصویر محور موهومی را تحت $w = \frac{1}{z}$ بیابید. راه‌حل: برای $y \neq 0, y \in \mathbb{R}, z = iy$

$$w = \frac{1}{iy} = -i\frac{1}{y},$$

که کاملاً موهومی است. در $z = 0, w = \infty$ و $z = \infty, w = 0$ نگاشت می‌شود، هر دو روی محور موهومی گسترش یافته. بنابراین، محور موهومی به خودش نگاشت می‌شود.

۹.۲.۴ تمرین‌های دشوارتر

(آ) ثابت کنید که $w = \frac{1}{z}$ دایره‌هایی که از مبدأ عبور می‌کنند را به خطوطی که از مبدأ عبور نمی‌کنند نگاشت می‌کند.

(ب) تصویر منطقه $\{z \mid \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}$ (چهارم اول) را تحت $w = \frac{1}{z}$ بیابید.

۳.۴ نگاشت‌ها توسط $w = \frac{1}{z}$

۳.۴ نگاشت‌ها توسط $w = \frac{1}{z}$

۱.۳.۴ تعریف

تبدیل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$w = \frac{1}{z},$$

که در آن z یک متغیر مختلط است و w تصویر آن در صفحه مختلط است. این نگاشت، که به عنوان برگشت شناخته می‌شود، در $z = 0$ تعریف نشده است، $z = 0$ را به $w = \infty$ و $z = \infty$ را به $w = 0$ در صفحه مختلط گسترش یافته $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ نگاشت می‌کند. این تبدیل، یک مورد خاص از تبدیلات موبیوس است، که با سادگی و اثرات هندسی عمیق خود مشخص می‌شود.

۲.۳.۴ ویژگی‌های اصلی

تبدیل $w = \frac{1}{z}$ دارای چندین ویژگی اساسی است که در نقش آن در تحلیل مختلط حائز اهمیت هستند:

(آ) برگشت و انعکاس: برای یک عدد مختلط $z = re^{i\theta}$ ، که در آن $r = |z|$ و $\theta = \arg z$ ، تبدیل به:

$$w = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

می‌شود. این امر اندازه را از r به $\frac{1}{r}$ برمی‌گرداند و آرگمان را از θ به $-\theta$ انعکاس می‌دهد.

(ب) نگاشت شکل‌های هندسی: تبدیل، دایره‌های عمومی (خطوط یا دایره‌ها در صفحه مختلط)

۳.۴ نگاشت‌ها توسط $w = \frac{1}{z}$

را به دایره‌های عمومی نگاشت می‌کند:

- خطوطی که از مبدأ عبور نمی‌کنند، به دایره‌هایی که از مبدأ عبور می‌کنند نگاشت می‌شوند.
- دایره‌هایی که از مبدأ عبور نمی‌کنند، به دایره‌های دیگری که از مبدأ عبور نمی‌کنند نگاشت می‌شوند.
- خطوطی که از مبدأ عبور می‌کنند، به خطوط دیگری که از مبدأ عبور می‌کنند نگاشت می‌شوند.
- دایره‌هایی که از مبدأ عبور می‌کنند، به خطوطی که از مبدأ عبور نمی‌کنند نگاشت می‌شوند.

این ویژگی از حفظ دایره‌های عمومی توسط تبدیلات موبیوس ناشی می‌شود.

(ج) همدیس بودن: تبدیل همدیس است، یعنی زوایا را در همه نقاطی که تعریف شده است ($z \neq 0$) حفظ می‌کند. مشتق آن:

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{1}{z^2} \neq 0 \text{ برای } z \neq 0,$$

که حفظ زاویه را تضمین می‌کند.

(د) نقاط ثابت: نقاطی که $w = z$ را برآورده می‌کنند، یعنی $z = \frac{1}{z}$ ، منجر به $z^2 = 1$ می‌شود، بنابراین $z = \pm 1$. این نقاط ثابت تبدیل هستند.

(ه) نگاشت مناطق: تبدیل مناطق خاص را به صورت زیر نگاشت می‌کند:

- نصف‌النهار بالا ($\text{Im}(z) > 0$) به نصف‌النهار پایین ($\text{Im}(w) < 0$).
- داخل دیسک واحد ($|z| < 1$) به خارج آن ($|w| > 1$)، و بالعکس.

۳.۴ نگاشت‌ها توسط $w = \frac{1}{z}$

• دایرة واحد ($|z| = 1$) به خودش از طریق همزادساز: $w = \bar{z}$.

۳.۳.۴ تفسیر هندسی

تبدیل $w = \frac{1}{z}$ نقاط را نسبت به دایرة واحد برمی‌گرداند و آن‌ها را از محور حقیقی انعکاس می‌دهد. برای $z = x + iy$ داریم:

$$w = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

نقاط داخل دایره واحد ($|z| < 1$) به نقاط خارج از آن ($|w| > 1$) نگاشت می‌شوند، و بالعکس، در حالی که نقاط روی دایرة واحد ($|z| = 1$) از طریق همزادساز به خودشان نگاشت می‌شوند. خطوط و دایره‌ها به خطوط یا دایره‌ها تبدیل می‌شوند، بسته به اینکه آیا از مبدأ عبور می‌کنند یا خیر.

۴.۳.۴ روش کلی برای نگاشت

برای یافتن تصویر یک دایره $|z - z_0| = r$ یا یک خط، $z = \frac{1}{w}$ را جایگذاری کنید و معادله حاصل را حل کنید. اگر دایره از مبدأ عبور نکند ($|z_0| \neq r$)، تصویر یک دایره با مرکز $w_0 = \frac{\bar{z}_0}{|z_0|^2 - r^2}$ و شعاع $R = \frac{r}{|z_0|^2 - r^2}$ است. اگر دایره از مبدأ عبور کند، تصویر یک خط است.

۵.۳.۴ مثال‌های گویا

مثال‌های زیر رفتار تبدیل را نشان می‌دهند:

(آ) خط عمودی $x = 1$: خط $z = 1 + iy$ به دایره $|w - 0.5| = 0.5$ نگاشت می‌شود، که از مبدأ عبور می‌کند.

۳.۴ نگاشت‌ها توسط $w = \frac{1}{z}$

(ب) دایره $|z| = 2$: به دایره $|w| = \frac{1}{2}$ نگاشت می‌شود، که در مبدأ متمرکز است.

(ج) دایره واحد $|z| = 1$: از طریق همزادساز به خودش نگاشت می‌شود ($w = \bar{z}$).

(د) دایره $|z - 2| = 1$: به دایره‌ای با مرکز $w = \frac{2}{3}$ و شعاع $\frac{1}{3}$ نگاشت می‌شود، که از مبدأ عبور نمی‌کند.

۶.۳.۴ کاربردها و نتایج

تبدیل $w = \frac{1}{z}$ در چندین حوزه کلیدی است:

- معادله لاپلاس: مسائل مقدار مرزی را با نگاشت دامنه‌های پیچیده به دامنه‌های ساده‌تر، مانند تبدیل خارج دیسک به داخل آن، ساده می‌کند.
- الکترواستاتیک: در روش تصاویر برای رساناها با تقارن کروی یا استوانه‌ای استفاده می‌شود.

- دینامیک سیالات: جریان سیالات حول موانع را با تغییر شکل دامنه‌های جریان مدل‌سازی می‌کند، در حالی که ویژگی‌های فیزیکی کلیدی را حفظ می‌کند.

یک نتیجه کلیدی این است که $w = \frac{1}{z}$ یک تبدیل موبیوس با ضرایب $a = 0$ ، $b = 1$ ، $c = 1$ ، $d = 0$ است، که نسبت‌های متقاطع را حفظ می‌کند و با دیگر تبدیلات موبیوس قابل ترکیب است.

۳.۴ نگاشت‌ها توسط $w = \frac{1}{z}$

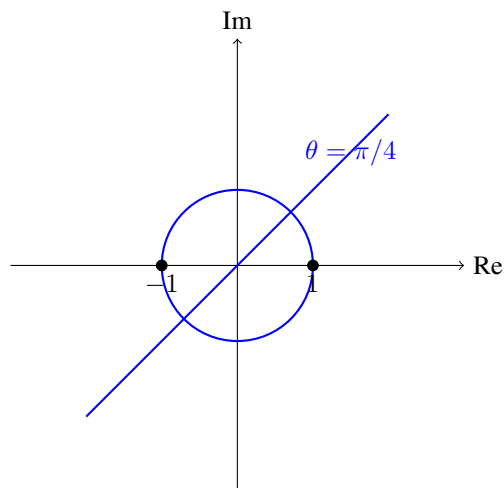
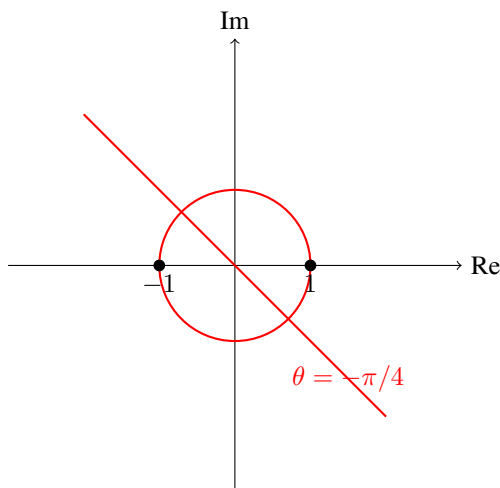
۷.۳.۴ زمینه تاریخی

تبدیل $w = \frac{1}{z}$ یک مورد خاص از تبدیلات موبیوس است، که توسط اوگست فردیناند موبیوس در قرن نوزدهم معرفی شد. کارهای او تبدیلات خطی را تعمیم داد و چارچوبی برای درک تغییرات هندسی در صفحه مختلط فراهم کرد. مشارکت‌های ریاضیدانانی مانند برنهارد ریمان و آگوستین-لویی کوشی اهمیت آن را در تحلیل مختلط تثبیت کرد.

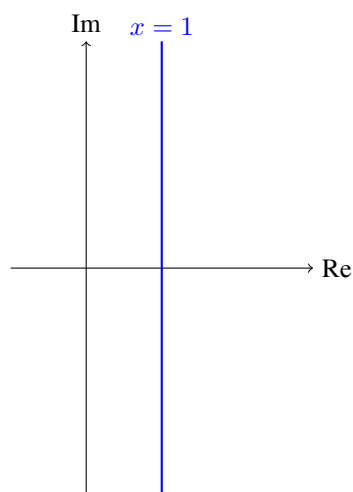
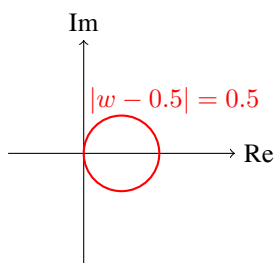
۸.۳.۴ شهود

صفحه مختلط را به صورت یک بوم انعطاف‌پذیر تصور کنید که توسط تبدیل $w = \frac{1}{z}$ تغییر شکل می‌یابد. نقاط نزدیک به مبدأ (مانند $z = 0.5$) به فواصل بزرگ (مانند $w = 2$) پرتاب می‌شوند، در حالی که نقاط دور (مانند $z = 2$) نزدیک (مانند $w = 0.5$) کشیده می‌شوند. خطوط مستقیم، مانند $x = 1$ ، به دایره‌هایی مانند $|w - 0.5| = 0.5$ خم می‌شوند، در حالی که دایره‌هایی مانند $|z| = 2$ به دایره‌های کوچکتر مانند $|w| = \frac{1}{2}$ تبدیل می‌شوند. دایره واحد از محور حقیقی انعکاس می‌یابد، با $z = e^{i\theta}$ که به $w = e^{-i\theta}$ نگاشت می‌شود. این تغییر شکل پویا توانایی تبدیل برای تبدیل مسیرهای خطی به منحنی‌ها و بالعکس را نشان می‌دهد.

۳.۴ نگاشت‌ها توسط $w = \frac{1}{z}$

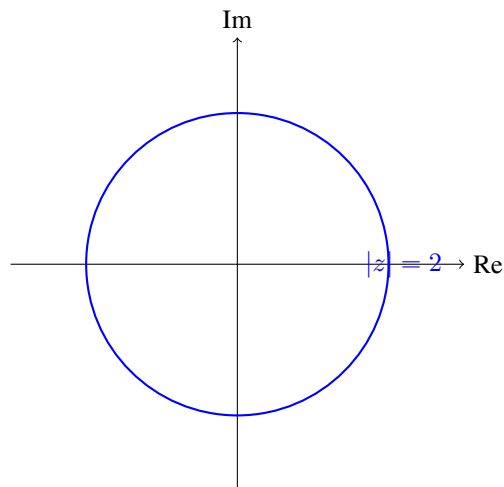
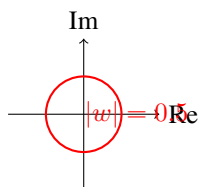


شکل ۲۱.۴: تبدیل $w = \frac{1}{z}$ دایره واحد $|z| = 1$ را به خودش نگاشت می‌کند و خط شعاعی $y = x$ (زاویه $\theta = \pi/4$) را به $v = -u$ (زاویه $\theta = -\pi/4$) نگاشت می‌دهد، که وارونگی و بازتاب را نشان می‌دهد. نقاط ثابت در $z = \pm 1$ نشانه‌گذاری شده‌اند.

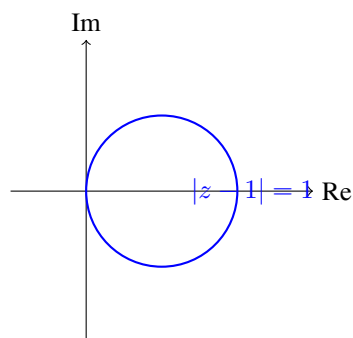
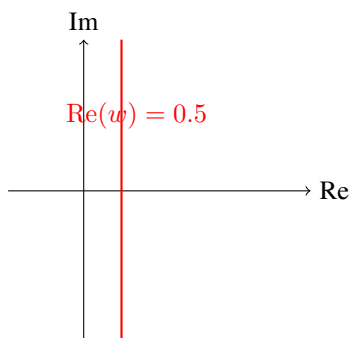


شکل ۲۲.۴: خط عمودی $\text{Re}(z) = 1$ به دایره $|w - 0.5| = 0.5$ نگاشت می‌شود، که از مبدا می‌گذرد، و نشان می‌دهد چگونه خطوطی که از مبدا نمی‌گذرند به دایره تبدیل می‌شوند.

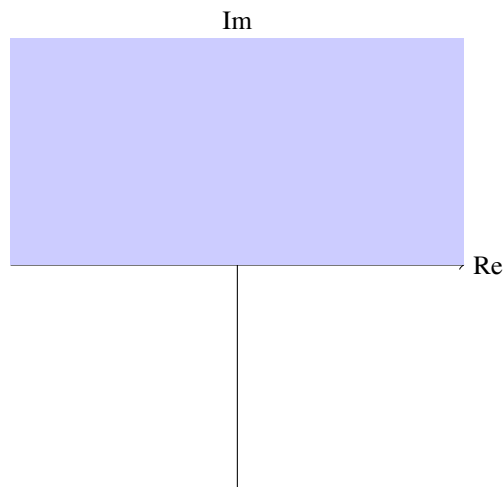
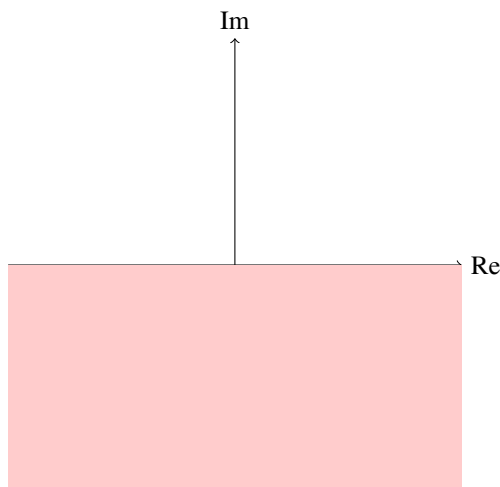
۳.۴ نگاشت‌ها توسط $w = \frac{1}{z}$



شکل ۳.۴: دایره $|z| = 2$ به دایره $|w| = 0.5$ نگاشت می‌شود، که نشان می‌دهد چگونه دایره‌های گذرنده از مبدا به دایره باقی می‌مانند.

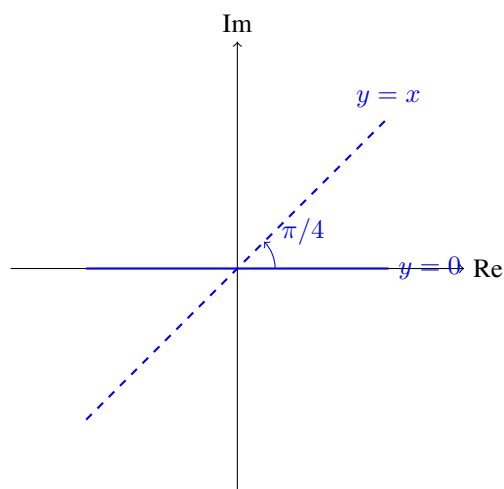
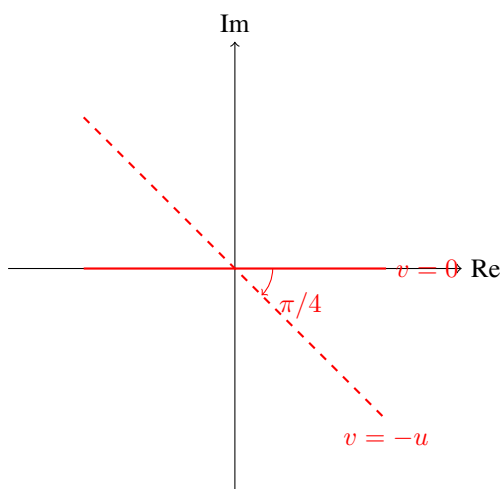


شکل ۳.۴: دایره $|z - 1| = 1$ که از مبدا می‌گذرد، به خط $\text{Re}(w) = 0.5$ نگاشت می‌شود، که نشان می‌دهد چگونه دایره‌های گذرنده از مبدا به خطوط تبدیل می‌شوند.



شکل ۳.۴: نیم‌صفحه بالایی $\text{Im}(z) > 0$ به نیم‌صفحه پایینی $\text{Im}(w) < 0$ نگاشت می‌شود، که نگاشت ناحیه را نشان می‌دهد.

۳.۴ نگاشت‌ها توسط $w = \frac{1}{z}$



شکل ۳.۴: هم‌نگاری: تبدیل زاویه $\pi/4$ بین محور حقیقی و خط $y = x$ را حفظ می‌کند و آن‌ها را به محور حقیقی و $v = -u$ نگاشت می‌دهد، با همان زاویه.

تمرین‌های زیر درک را تقویت می‌کنند، با راه‌حل‌های ارائه شده برای وضوح:

(آ) تصویر خط $y = x$ را تحت $w = \frac{1}{z}$ بیابید. راه‌حل: برای $z = x + ix = x(1 + i)$:

$$w = \frac{1}{x(1 + i)} = \frac{1 - i}{2x}.$$

فرض کنید $w = u + iv$ ، پس $u = \frac{1}{2x}$ ، $v = -\frac{1}{2x}$. بنابراین، $v = -u$ ، و تصویر، خط $v = -u$ است.

(ب) تصویر دیسک $|z - 1| < 1$ را تحت $w = \frac{1}{z}$ تعیین کنید. راه‌حل: دیسک $|z - 1| < 1$

در مرکز $z = 1$ با شعاع ۱ است، که از مبدأ روی مرز خود عبور می‌کند. مرز $|z - 1| = 1$

به خط $\operatorname{Re}(w) = \frac{1}{2}$ نگاشت می‌شود. نقاط داخل دیسک، مانند $z = 0.5$ ($|0.5 - 1| = 0.5 < 1$)

به $w = 2$ نگاشت می‌شوند، با $\operatorname{Re}(w) = 2 > \frac{1}{2}$. بنابراین، دیسک به

نیم‌نهار $\operatorname{Re}(w) > \frac{1}{2}$ نگاشت می‌شود.

(ج) نشان دهید که $w = \frac{1}{z}$ محور حقیقی را به خودش نگاشت می‌کند. راه‌حل: برای

$$x \neq 0, x \in \mathbb{R}, z = x + 0i$$

$$w = \frac{1}{x},$$

که حقیقی است. در صفحه مختلط گسترش‌یافته، $z = 0$ به $w = \infty$ و $z = \infty$ به

$w = 0$ نگاشت می‌شود، هر دو روی محور حقیقی گسترش‌یافته. بنابراین، محور حقیقی به

خودش نگاشت می‌شود.

۴.۴ تبدیلات خطی کسری

(د) تصویر محور موهومی را تحت $w = \frac{1}{z}$ بیابید. راه حل: برای $z = iy$ ، $y \in \mathbb{R}$ ، $y \neq 0$:

$$w = \frac{1}{iy} = -i\frac{1}{y},$$

که کاملاً موهومی است. در $z = 0$ ، $w = \infty$ ، و $z = \infty$ به $w = 0$ نگاشت می شود، هر دو روی محور موهومی گسترش یافته. بنابراین، محور موهومی به خودش نگاشت می شود.

۱۰.۳.۴ تمرین های دشوارتر

(آ) ثابت کنید که $w = \frac{1}{z}$ دایره هایی که از مبدأ عبور می کنند را به خطوطی که از مبدأ عبور نمی کنند نگاشت می کند.

(ب) تصویر منطقه $\{z \mid \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}$ (چهارم اول) را تحت $w = \frac{1}{z}$ بیابید.

۴.۴ تبدیلات خطی کسری

۱.۴.۴ تعریف

تبدیل خطی کسری، یا تبدیل موبیوس، تابعی به شکل زیر است:

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

که در آن $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ، و شرط مشخص کننده $ad - bc \neq 0$ تضمین می کند که تابع ثابت نباشد و معکوس پذیر باشد. این تبدیل، صفحه مختلط گسترش یافته $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ را به خود نگاشت می کند،

۴.۴ تبدیلات خطی کسری

با $z = -\frac{d}{c}$ (اگر $c \neq 0$) که به بی‌نهایت نگاشت می‌شود و $z = \infty$ که به $\frac{a}{c}$ نگاشت می‌شود.

۲.۴.۴ ویژگی‌های اصلی

تبدیلات خطی کسری دارای چندین ویژگی اساسی هستند که آن‌ها را در تحلیل مختلط ضروری می‌سازند:

(آ) ترکیب: ترکیب دو تبدیل خطی کسری، یک تبدیل خطی کسری دیگر است. برای $f(z)$

$g(z) = \frac{pz+q}{rz+s}$ و $g(f(z))$ ترکیب $g(f(z))$ به صورت زیر است:

$$g(f(z)) = \frac{p\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) + q}{r\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) + s} = \frac{(pa + qc)z + (pb + qd)}{(ra + sc)z + (rb + sd)},$$

که از شکل $\frac{Az+B}{Cz+D}$ است، با $AD - BC \neq 0$ اگر $ad - bc \neq 0$ و $ps - qr \neq 0$.

(ب) معکوس‌پذیری: هر تبدیل خطی کسری معکوس‌پذیر است، و معکوس آن نیز یک تبدیل

خطی کسری است. برای $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ، حل $w = \frac{az+b}{cz+d}$ برای z :

$$w(cz + d) = az + b \implies cwz + dw = az + b \implies$$

$$z(cw - a) = b - dw \implies z = \frac{b - dw}{cw - a} = \frac{-dw + b}{cw - a},$$

که یک تبدیل خطی کسری دیگر است.

(ج) نگاشت دایره‌های عمومی: تبدیلات خطی کسری، دایره‌های عمومی (خطوط یا دایره‌ها در

صفحه مختلط) را به دایره‌های عمومی دیگر نگاشت می‌کنند. یک دایره $|z - z_0| = r$

یا خط $\text{Re}(Az + B\bar{z} + C) = 0$ به یک دایره یا خط دیگر تحت $w = \frac{az+b}{cz+d}$ نگاشت

۴.۴ تبدیلات خطی کسری

می‌شود، به دلیل شکل کسری که معادلات درجه دوم را حفظ می‌کند.

(د) همدیسی: این تبدیلات همدیس هستند، یعنی زوایا را در نقاطی که مشتق غیر صفر است حفظ می‌کنند. مشتق به صورت زیر است:

$$f'(z) = \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2},$$

که جز در $z = -\frac{d}{c}$ (اگر $c \neq 0$)، جایی که $f(z)$ قطب دارد، غیر صفر است.

(ه) نقاط ثابت: نقاط ثابت، نقاطی هستند که $f(z) = z$ را برآورده می‌کنند، که منجر به:

$$\frac{az + b}{cz + d} = z \implies az + b = cz^2 + dz \implies cz^2 + (d - a)z - b = 0.$$

این معادله درجه دوم حداکثر دو جواب دارد، مگر اینکه $c = 0$ و $d = a$ ، که تبدیل هویت را به دست می‌دهد.

(و) حفظ نسبت متقاطع: نسبت متقاطع چهار نقطه z_1, z_2, z_3, z_4 ، که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(z_1, z_2; z_3, z_4) = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)},$$

تحت تبدیلات خطی کسری حفظ می‌شود، یعنی $(f(z_1), f(z_2); f(z_3), f(z_4)) = (z_1, z_2; z_3, z_4)$.

۳.۴.۴ تفسیر هندسی

تبدیلات خطی کسری را می‌توان به صورت ترکیبی از عملیات ساده‌تر تجسم کرد: انتقال $z \mapsto z + b$ ، چرخش و مقیاس‌بندی $z \mapsto az$ ، و برگشت $z \mapsto \frac{1}{z}$. برای مثال، تبدیل $w = \frac{1}{z}$

۴.۴ تبدیلات خطی کسری

(مورد خاصی با $a = 0, b = 1, c = 1, d = 0$) نقاط را نسبت به دایره واحد برمی گرداند و آن‌ها را از محور حقیقی انعکاس می دهد. به طور کلی، هر تبدیل خطی کسری می تواند هر سه نقطه متمایز را به هر سه نقطه دیگر در صفحه مختلط گسترش یافته نگاشت کند، که این ویژگی آن را برای نگاشت های هندسی بسیار قدرتمند می سازد.

۴.۴.۴ مثال های گویا

مثال های زیر رفتار تبدیلات خطی کسری را نشان می دهند:

(آ) نگاشت دیسک واحد به خودش: در نظر بگیرید $f(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ ، که در آن $|a| < 1$.

این تبدیل دیسک واحد $|z| < 1$ را به خودش نگاشت می کند، با $z = a$ که به $w = 0$ نگاشت می شود. برای مثال، اگر $\theta = 0, a = 0.5$:

$$f(z) = \frac{z - 0.5}{1 - 0.5z}.$$

در $z = 0, f(0) = -0.5$ ؛ در $z = 1, f(1) = \frac{1-0.5}{1-0.5} = 1$ ، که تأیید می کند حاشیه به خودش نگاشت می شود.

(ب) نگاشت نصف النهار بالا به دیسک واحد: تبدیل $w = \frac{z-i}{z+i}$ نصف النهار بالا $\text{Im}(z) > 0$

را به دیسک واحد ($|w| < 1$) نگاشت می کند. برای $z = x + iy, y > 0$:

$$w = \frac{x + iy - i}{x + iy + i} = \frac{x + i(y - 1)}{x + i(y + 1)}.$$

محاسبه:

$$|w|^2 = \frac{x^2 + (y-1)^2}{x^2 + (y+1)^2} = \frac{x^2 + y^2 - 2y + 1}{x^2 + y^2 + 2y + 1} < 1,$$

زیرا $y > 0$.

(ج) نقاط ثابت: برای $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$ ، نقاط ثابت را پیدا کنید:

$$\frac{z+1}{z-1} = z \implies z+1 = z(z-1) \implies z+1 = z^2 - z \implies$$

$$z^2 - 2z - 1 = 0 \implies z = 1 \pm \sqrt{2}.$$

(د) نگاشت یک خط: خط $\text{Re}(z) = 1$ ، یعنی $z = 1 + iy$ تحت $w = \frac{z-i}{z+i}$:

$$w = \frac{(1+iy) - i}{(1+iy) + i} = \frac{1+i(y-1)}{1+i(y+1)}.$$

محاسبه $|w|$:

$$|w|^2 = \frac{1 + (y-1)^2}{1 + (y+1)^2} = \frac{1 + y^2 - 2y + 1}{1 + y^2 + 2y + 1} = \frac{y^2 - 2y + 2}{y^2 + 2y + 2}.$$

آزمایش نقاط (مانند $y=0, w=1$) نشان می‌دهد که تصویر، دایره واحد است.

۵.۴.۴ کاربردها و نتایج

تبدیلات خطی کسری در چندین حوزه کلیدی هستند:

- نگاشت همدیس: مسائل مقدار مرزی را با نگاشت دامنه‌های پیچیده به دامنه‌های ساده‌تر، مانند تبدیل نصف‌النهار به دیسک برای حل معادله لاپلاس در فیزیک، ساده می‌کنند.

۴.۴ تبدیلات خطی کسری

- الکترواستاتیک: در روش تصاویر برای محاسبه پتانسیل‌ها برای رساناها با هندسه‌های خاص استفاده می‌شوند.
- دینامیک سیالات: جریان سیالات را با حفظ ویژگی‌های جریان، از طریق تغییر شکل دامنه‌ها، مدل‌سازی می‌کنند.
- هندسه پروژکتیو: تبدیلات خطی پروژکتیو مختلط را نمایندگی می‌کنند، که نسبت‌های متقاطع را حفظ می‌کنند.

یک نتیجه کلیدی این است که هر تبدیل خطی کسری به طور منحصر به فرد توسط تصویر سه نقطه متمایز تعیین می‌شود، به دلیل حفظ نسبت متقاطع. علاوه بر این، آن‌ها گروه خودمختاری‌های کره ریمان را تشکیل می‌دهند، که مفهومی اساسی در هندسه مختلط است.

۶.۴.۴ زمینه تاریخی

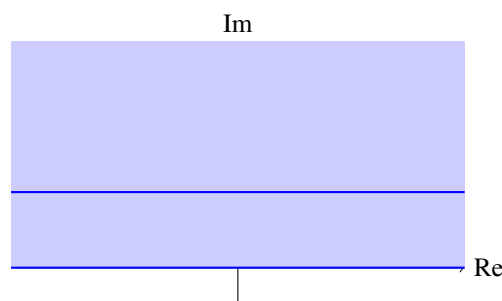
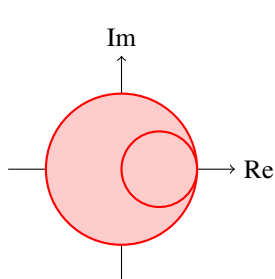
تبدیلات خطی کسری توسط اوگست فردیناند موبیوس در قرن نوزدهم رسمی شدند، که بر پایه کارهای قبلی لئونارد اویلر و ژوزف-لویی لاگرانژ در نگاشت‌های خاص بنا شده بود. مشارکت‌های آگوستین-لویی کوشی و برنهارد ریمان در توسعه تحلیل مختلط، اهمیت آن‌ها را، به ویژه در درک نگاشت‌های هم‌مدیس و هندسه صفحه مختلط گسترش یافته، تثبیت کرد.

۷.۴.۴ شهود

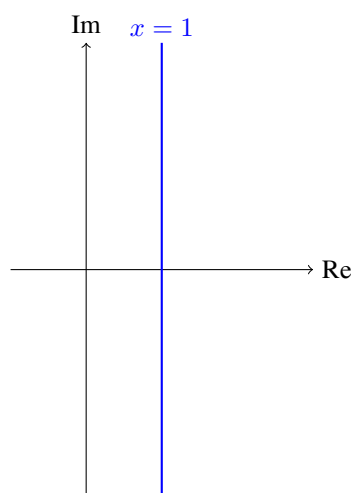
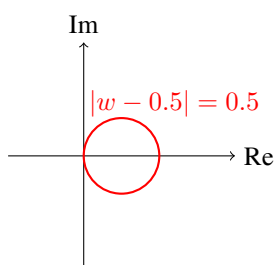
صفحه مختلط را به صورت یک بوم انعطاف‌پذیر تصور کنید که توسط تبدیل خطی کسری $w = \frac{az+b}{cz+d}$ تغییر شکل می‌یابد. این تبدیل می‌تواند صفحه را بکشد، بچرخاند، جابجا کند یا برعکس کند، و

۴.۴ تبدیلات خطی کسری

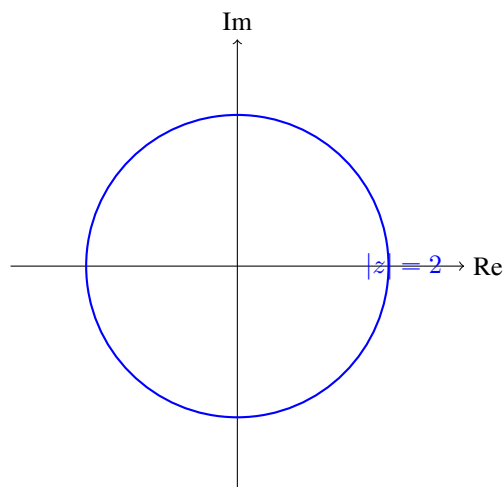
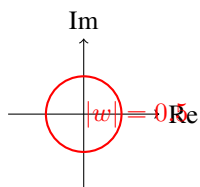
هر سه نقطه را به هر سه نقطه دیگر نگاشت کند. برای مثال، تبدیل $w = \frac{z-i}{z+i}$ نصف النهار بالا را به دیسک واحد فشرده می‌کند، و فضای بی‌نهایت بالای محور حقیقی را به یک دایره محدود تبدیل می‌کند. خطوط ممکن است به دایره‌ها خم شوند، و دایره‌ها ممکن است کشیده یا کوچک شوند، اما زوایا حفظ می‌شوند، که تعاملی پویا از اشکال ایجاد می‌کند. توانایی تبدیل در نگاشت نقاط خاص، مانند $z = i$ به $w = 0$ ، امکان کنترل دقیق پیکربندی‌های هندسی را فراهم می‌کند، مانند تنظیم مجدد یک نقشه برای هم‌ترازی نقاط کلیدی.



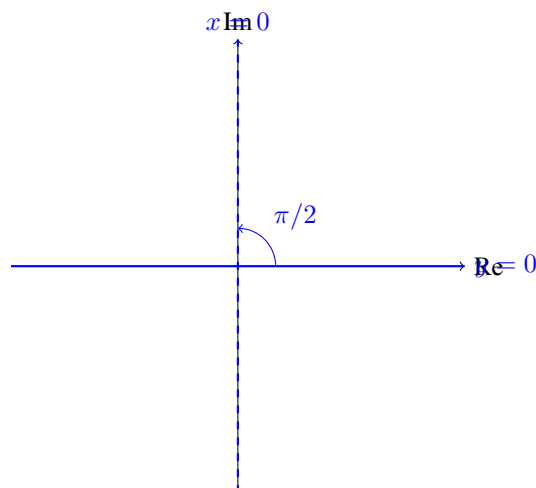
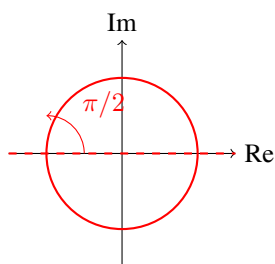
شکل ۲۷.۴: تبدیل $w = \frac{z-i}{z+i}$ نیم‌صفحه بالایی $\text{Im}(z) > 0$ را به دیسک واحد $|w| < 1$ نگاشت می‌کند. محور حقیقی به دایره واحد نگاشت می‌شود، و خط $\text{Im}(z) = 1$ به دایره $|w - 0.5| = 0.5$ نگاشت می‌شود.



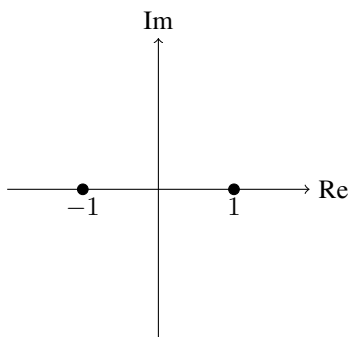
شکل ۲۸.۴: تحت تبدیل $w = \frac{1}{z}$ ، خط عمودی $\text{Re}(z) = 1$ به دایره $|w - 0.5| = 0.5$ نگاشت می‌شود، که نشان می‌دهد چگونه خطوط به دایره‌ها نگاشت می‌شوند.



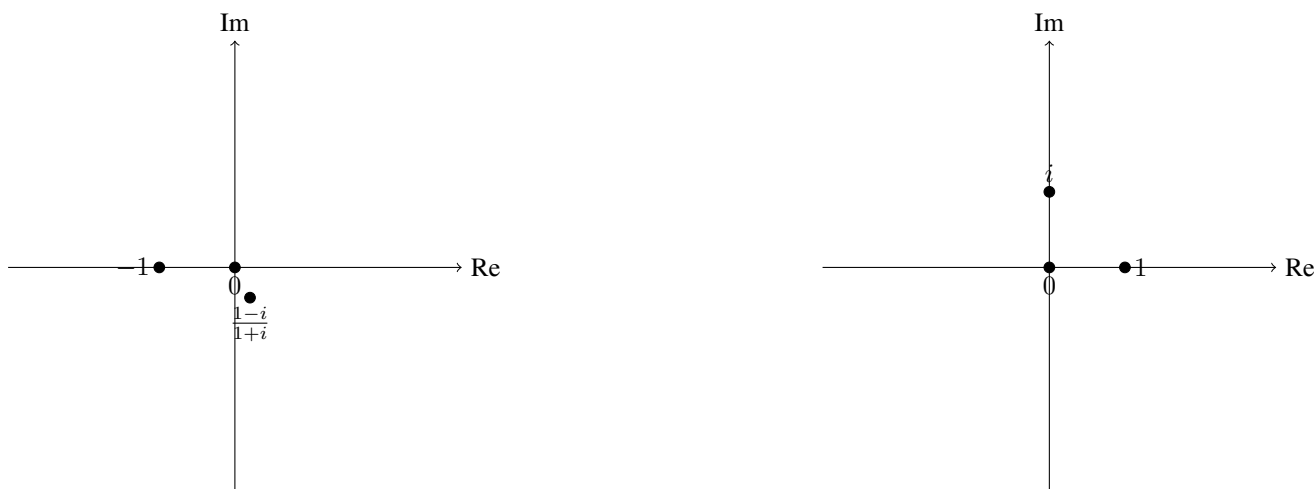
شکل ۲۹.۴: دایره $|z|=2$ تحت تبدیل $w = \frac{1}{z}$ به دایره $|w|=0.5$ نگاشت می‌شود، که نگاشت دایره به دایره را نشان می‌دهد.



شکل ۳۰.۴: هم‌نگاری: تبدیل $w = \frac{z-i}{z+i}$ زاویه $\pi/2$ بین محورهاى حقیقی و موهومی را در $z=0$ حفظ می‌کند و به دایره واحد و محور حقیقی در $w=-1$ نگاشت می‌دهد.



شکل ۳۱.۴: نقاط ثابت تبدیل $w = \frac{1}{z}$ در $z = \pm 1$ ، جایی که $f(z) = z$.



شکل ۳۲.۴: تبدیل $w = \frac{z-i}{z+i}$ نقاط $z = i, 0, 1$ را به ترتیب به $w = 0, -1, \frac{1-i}{1+i}$ نگاشت می‌کند، که نشان می‌دهد چگونه سه نقطه نگاشت را تعیین می‌کند.

۸.۴.۴ تمرین‌ها

تمرین‌های زیر درک را تقویت می‌کنند، با راه‌حل‌های ارائه‌شده:

(آ) یافتن تبدیل خطی کسری که $z_1 = 0$ را به $w_1 = 1$ ، $z_2 = 1$ را به $w_2 = i$ ، و $z_3 = i$

را به $w_3 = 0$ نگاشت کند. راه‌حل: فرض کنید $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. با استفاده از شرایط:

$$f(0) = \frac{b}{d} = 1 \implies b = d,$$

$$f(i) = \frac{ai + b}{ci + d} = 0 \implies ai + b = 0 \implies b = -ai,$$

$$f(1) = \frac{a + b}{c + d} = i.$$

از $b = d$ و $b = -ai$ ، داریم $d = -ai$. جایگذاری در شرط سوم:

$$\frac{a - ai}{c - ai} = i \implies a(1 - i) = i(c - ai) \implies a - ai = ic - ai^2 \implies$$

$$a - ai = ic + a \implies a - ic - ai - a = 0 \implies c = a \frac{1 - i}{i}.$$

فرض کنید $a = 1$ ، پس $c = -1 + i$ ، $b = -i$ ، $d = -i$. بنابراین:

$$f(z) = \frac{z - i}{(-1 + i)z - i}.$$

ساده‌سازی با ضرب صورت و مخرج در i :

$$f(z) = \frac{i(z - i)}{i(-1 + i)z - i^2} = \frac{iz + 1}{(1 + i)z + 1}.$$

بررسی: $f(1) = \frac{i+1}{1+i+1} = i$ ، $f(i) = \frac{i+i+1}{(1+i)i+1} = \frac{i+1}{i+i+1} = 0$ ، $f(0) = \frac{1}{1} = 1$.

(ب) تصویر محور حقیقی را تحت $w = \frac{z-i}{z+i}$ تعیین کنید. راه‌حل: برای $x \in \mathbb{R}$ ، $z = x$

$$w = \frac{x - i}{x + i}.$$

محاسبه:

$$|w| = \left| \frac{x - i}{x + i} \right| = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} = 1.$$

بنابراین، محور حقیقی به دایره واحد $|w| = 1$ نگاشت می‌شود.

۵.۴ یک شکل ضمنی

(ج) نقاط ثابت $f(z) = \frac{2z+3}{z-1}$ را پیدا کنید. راه حل: حل $\frac{2z+3}{z-1} = z$:

$$2z+3 = z(z-1) \implies 2z+3 = z^2-z \implies z^2-3z-3 = 0 \implies z = \frac{3 \pm \sqrt{9+12}}{2}$$

۹.۴.۴ تمرین‌های دشوارتر

(آ) ثابت کنید که هر تبدیل خطی کسری را می‌توان به صورت ترکیبی از انتقال، چرخش، مقیاس‌بندی، و برگشت نمایش داد.

(ب) تبدیل خطی کسری‌ای پیدا کنید که نصف‌النهار بالا را به دیسک واحد نگاشت کند و i را به $\bullet$ بفرستد.

۵.۴ یک شکل ضمنی

۱.۵.۴ تعریف

در تحلیل مختلط، یک تابع ضمنی $w = f(z)$ توسط معادله‌ای به شکل زیر توصیف می‌شود:

$$F(z, w) = 0,$$

که در آن $F : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ تابعی است که از صفحه مختلط $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ به $\mathbb{C}$ نگاشت می‌کند. برخلاف توابع صریح، w به طور مستقیم به عنوان تابعی از z بیان نمی‌شود؛ بلکه رابطه بین w و z به صورت ضمنی داده شده است. چالش اصلی، تعیین شرایطی است که این معادله، w را به عنوان یک تابع هولومورف (مختلط قابل مشتق‌گیری) از z تعریف کند.

۵.۴ یک شکل ضمنی

۲.۵.۴ قضیه تابع ضمنی

قضیه تابع ضمنی برای فهم این توابع مرکزی است. این قضیه بیان می‌کند که اگر $F(z_0, w_0) = 0$ ، F در هر دو متغیر z و w در نزدیکی (z_0, w_0) هولومورف باشد، و مشتق جزئی $\frac{\partial F}{\partial w}(z_0, w_0) \neq 0$ باشد، آنگاه یک تابع هولومورف منحصر به فرد $g(z)$ در نزدیکی z_0 وجود دارد که $g(z_0) = w_0$ و $F(z, g(z)) = 0$ برای همه z در آن نزدیکی. مشتق این تابع به صورت زیر است:

$$g'(z) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}(z, g(z))}{\frac{\partial F}{\partial w}(z, g(z))},$$

با فرض اینکه مخرج صفر نباشد. این قضیه اطمینان می‌دهد که توابع ضمنی می‌توانند به عنوان نگاشت‌های هولومورف در نظر گرفته شوند، که امکان استفاده از ابزارهای تحلیل مختلط را فراهم می‌کند.

۳.۵.۴ ویژگی‌های اصلی

توابع ضمنی دارای ویژگی‌های متعددی هستند:

- (آ) **تحلیلی بودن:** هر شاخه از تابع در دامنه‌ای که برش‌های شاخه وجود ندارد، هولومورف (در هر نقطه از دامنه اش مشتق پذیر و تحلیلی باشد) است.
- (ب) **چندمقداری بودن:** توابعی مانند ریشه دوم $(w^2 = z)$ ، لگاریتم $(e^w = z)$ ، و توابع معکوس مثلثاتی $(\sin w = z)$ چندمقداری هستند و نیاز به برش‌های شاخه برای تکمقداری شدن دارند.

(ج) **نقاط شاخه:** نقاطی که در آن‌ها $\frac{\partial F}{\partial w} = 0$ ، نقاط شاخه هستند که قضیه در آن‌ها نقض

۵.۴ یک شکل ضمنی

می شود.

(د) همدیسی: این توابع در نقاطی که $\frac{\partial F}{\partial w} \neq 0$ ، همدیس هستند و زوایا را حفظ می کنند.

۴.۵.۴ تفسیر هندسی

توابع ضمنی را می توان با استفاده از سطوح ریمان تجسم کرد، که چارچوب هندسی برای مدیریت توابع چندمقداری فراهم می کنند. برای مثال، معادله $w^2 - z = 0$ تابع $w = \sqrt{z}$ را تعریف می کند، که چندمقداری است. سطح ریمان برای این تابع شامل دو صفحه است که در نقطه شاخه $z = 0$ به هم متصل شده اند، و امکان انتقال پیوسته بین شاخه ها را فراهم می کند.

۵.۵.۴ مثال های گویا

مثال های زیر مفاهیم کلیدی را نشان می دهند:

(آ) تابع ریشه دوم: برای $F(z, w) = w^2 - z$ ، حل برای w ، $w = \sqrt{z}$ را می دهد، که چندمقداری است. یک برش شاخه در امتداد محور حقیقی منفی، تکمقداری بودن را تضمین می کند.

(ب) تابع لگاریتم: برای $F(z, w) = e^w - z$ ، حل برای w ، $w = \log z$ را می دهد، که بی نهایت چندمقداری است. سطح ریمان با صفحات بی نهایت، این چندمقداری را برطرف می کند.

(ج) توابع معکوس مثلثاتی: برای $F(z, w) = \sin w - z$ ، حل برای w ، $w = \sin^{-1} z$ را می دهد، که به دلیل تناوب چندمقداری است.

۵.۴ یک شکل ضمنی

(د) معادله مکعبی: برای $F(z, w) = w^3 - 3w + z$ ، مشتق جزئی $\frac{\partial F}{\partial w} = 3w^2 - 3$ است، که در $w = \pm 1$ صفر می‌شود، و نقاط شاخه را نشان می‌دهد.

۶.۵.۴ کاربردها و نتایج

توابع ضمنی کاربردهای مهمی دارند:

- توابع چندمقداری: آنها توابعی مانند ریشه دوم، لگاریتم و توابع معکوس مثلثاتی را مدیریت می‌کنند.
- حل معادلات: آنها معادلاتی را که راه حل صریح ندارند، با تحلیل راه حل‌ها در نزدیکی حل می‌کنند.
- نگاشت‌های هم‌دیس: وقتی شرایط برقرار است، نگاشت‌های هم‌دیس را فراهم می‌کنند که زوایا را حفظ می‌کنند.
- سطوح ریمان: معادلات ضمنی سطوح ریمان را تعریف می‌کنند که برای فهم هندسی توابع چندمقداری حیاتی هستند.
- فیزیک و مهندسی: آنها در مدل‌سازی پدیده‌هایی مانند جریان سیال و میدان‌های الکتریکی استفاده می‌شوند.

یک نتیجه کلیدی این است که قضیه تابع ضمنی وجود محلی نگاشت‌های هولومورف را تضمین می‌کند، که پایه‌ای برای تحلیل توابع ضمنی فراهم می‌کند.

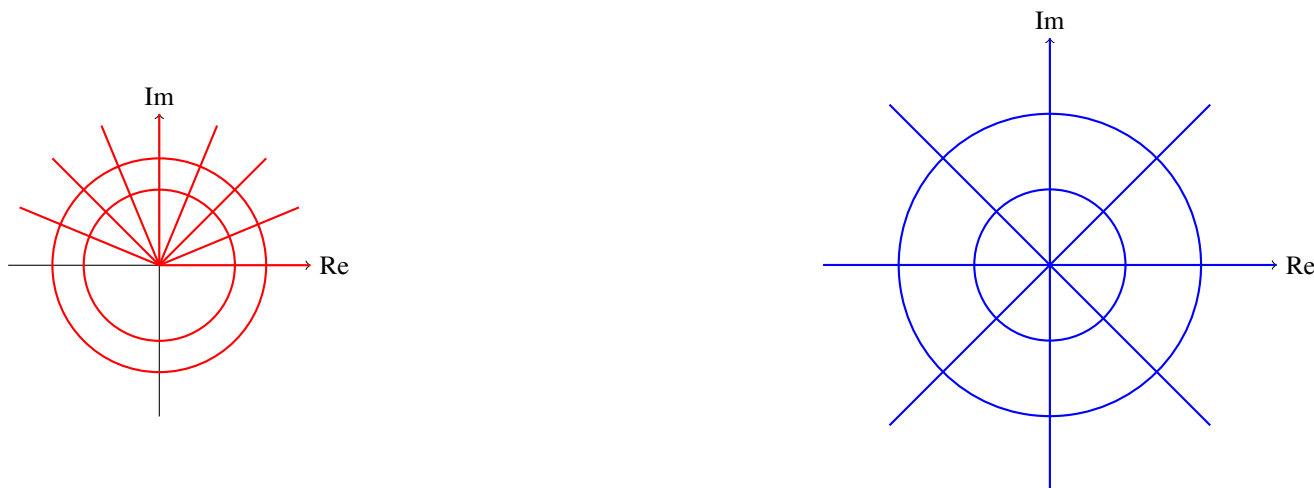
۵.۴ یک شکل ضمنی

۷.۵.۴ زمینه تاریخی

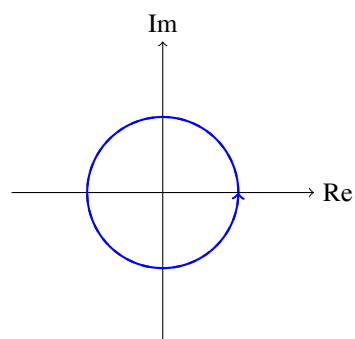
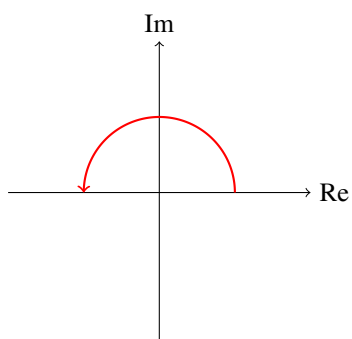
قضیه تابع ضمنی در تحلیل حقیقی سرچشمه گرفت و توسط ریاضیدانانی مانند برنهارد ریمان به تحلیل مختلط گسترش یافت، که سطوح ریمان را برای مدیریت توابع چندمقداری معرفی کرد.

۸.۵.۴ شهود

سطح ریمان را به عنوان چندین صفحه تصور کنید که روی صفحه مختلط قرار گرفته‌اند و در نقاط شاخه به هم متصل شده‌اند. برای $w = \sqrt{z}$ ، دو صفحه در $z = 0$ به هم متصل می‌شوند، که امکان انتقال پیوسته بین شاخه‌ها را فراهم می‌کند. برای $w = \log z$ ، سطح یک مارپیچ بی‌نهایت است که هر صفحه به یک شاخه لگاریتم مربوط می‌شود.



شکل ۳۳.۴: تبدیل $w = \sqrt{z}$ (شاخه اصلی) خطوط شعاعی با زوایای θ در صفحه z را به خطوط شعاعی با زاویه $\theta/2$ در صفحه w نگاشت می‌کند، و دایره‌های با شعاع r را به دایره‌های با شعاع $\sqrt{r}$ نگاشت می‌دهد.



شکل ۳۴.۴: دایره $|z| = 1$ که دو بار در صفحه z پیمایش می‌شود (ابتدا خط ممتد سپس خط چین) تحت تبدیل $w = \sqrt{z}$ به یک دایره واحد $|w| = 1$ در صفحه w نگاشت می‌شود، که نقطه انشعاب در $z = 0$ را نشان می‌دهد.



شکل ۳۵.۴: هم‌نگاری: تبدیل $w = \sqrt{z}$ زاویه $\pi/2$ بین محور حقیقی و خط $x = 2$ را در $z = 2$ حفظ می‌کند و به محور حقیقی و خط $u = \sqrt{2}$ در $w = \sqrt{2}$ نگاشت می‌دهد.

۹.۵.۴ تمرین‌ها

تمرین‌های زیر درک را تقویت می‌کنند، با راه‌حل‌های ارائه شده:

(آ) مشتق تابع تعریف شده توسط $w^2 - z = 0$ را بیابید. راه‌حل: بگذارید $F(z, w) = w^2 - z = 0$ محاسبه کنید:

$$\frac{\partial F}{\partial w} = 2w, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -1.$$

اگر $w \neq 0$ ، آنگاه:

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{-1}{2w} = \frac{1}{2w} = \frac{1}{2\sqrt{z}},$$

که با مشتق $w = \sqrt{z}$ سازگار است.

(ب) مشتق تابع تعریف شده توسط $e^w - z = 0$ را تعیین کنید. راه‌حل: بگذارید $F(z, w) = e^w - z = 0$ محاسبه کنید:

$$\frac{\partial F}{\partial w} = e^w, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -1.$$

از آنجا که $e^w = z$ و با فرض $z \neq 0$:

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{-1}{e^w} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z},$$

که با مشتق $w = \log z$ سازگار است.

(ج) مشتق تابع تعریف شده توسط $\sin w - z = 0$ را بیابید. راه حل: بگذارید $F(z, w) = \sin w - z = 0$. محاسبه کنید:

$$\frac{\partial F}{\partial w} = \cos w, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -1.$$

اگر $\cos w \neq 0$:

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{-1}{\cos w} = \frac{1}{\cos w} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}},$$

که با مشتق $w = \sin^{-1} z$ سازگار است، با انتخاب شاخه مناسب.

(د) تأیید کنید که $w^3 - 3w + z = 0$ به صورت محلی یک تابع هولومورف تعریف می‌کند. راه حل: بگذارید $F(z, w) = w^3 - 3w + z = 0$. محاسبه کنید:

$$\frac{\partial F}{\partial w} = 3w^2 - 3, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 1.$$

اگر $3w^2 - 3 \neq 0$ ، یعنی $w \neq \pm 1$ ، آنگاه $\frac{\partial F}{\partial w} \neq 0$ ، و قضیه وجود یک تابع هولومورف $w = g(z)$ را به صورت محلی با مشتق:

$$g'(z) = -\frac{1}{3w^2 - 3} = \frac{1}{3(1 - w^2)}$$

۶.۴ نگاشت‌های نیمه صفحه بالایی

تضمین می‌کند.

۱۰.۵.۴ تمرین‌های دشوارتر

(آ) نقاطی را که معادله $w^4 - w^2 + z = 0$ نمی‌تواند یک تابع هولومورف $w = g(z)$ تعریف کند، تعیین کنید و ماهیت این نقاط را شناسایی کنید.

(ب) سطح ریمان مرتبط با معادله ضمنی $w^2 - \sin z = 0$ را بیابید و نقاط شاخه آن را توصیف کنید.

۶.۴ نگاشت‌های نیمه صفحه بالایی

۱.۶.۴ تعریف

نیمه صفحه بالایی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}.$$

نگاشت‌های نیمه صفحه بالایی، تبدیلات همدیس هستند که $\mathbb{H}$ را به دامنه‌های دیگر، مانند دیسک واحد $\mathbb{D} = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}$ ، نگاشت می‌دهند یا $\mathbb{H}$ را حفظ می‌کنند. تبدیلات خطی کسری اصلی هستند که به شکل:

$$w = \frac{az + b}{cz + d},$$

۶.۴ نگاشت‌های نیمه صفحه بالایی

هستند، که در آن $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ و $ad - bc \neq 0$. یک مثال کلیدی، تبدیل کایلی است:

$$w = \frac{z - i}{z + i},$$

که $\mathbb{H}$ را به $\mathbb{D}$ نگاشت می‌دهد.

۲.۶.۴ ویژگی‌های اصلی

نگاشت‌های نیمه صفحه بالایی دارای ویژگی‌های اساسی متعددی هستند:

(آ) همدیسی: این تبدیلات زوایا را در نقاطی که مشتق غیر صفر است، حفظ می‌کنند. برای

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \text{ مشتق:}$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2},$$

که در نقاطی که $cz + d \neq 0$ ، غیر صفر است، همدیسی را تضمین می‌کند.

(ب) دوسویی: این تبدیلات در صفحه مختلط گسترش یافته $(\mathbb{C} \cup \{\infty\})$ دوسو هستند، با معکوس نیز یک تبدیل خطی کسری.

(ج) نگاشت دایره‌های کلی: آن‌ها خطوط و دایره‌ها (دایره‌های کلی) را به خطوط یا دایره‌های دیگر نگاشت می‌کنند. برای مثال، محور حقیقی (مرز $\mathbb{H}$) اغلب به دایره واحد نگاشت می‌شود.

(د) مکاتبات مرز: تبدیل کایلی، محور حقیقی را به دایره واحد نگاشت می‌دهد و نقاط در $\mathbb{H}$ را به داخل دیسک واحد می‌فرستد.

(ه) حفظ توابع هارمونیک: این نگاشت‌ها راه‌حل‌های معادله لاپلاس را حفظ می‌کنند، که آن‌ها

۶.۴ نگاشت‌های نیمه صفحه بالایی

را برای حل مسائل مقدار مرزی مفید می‌سازد.

(و) حفظ نیمه صفحه بالایی: وقتی ضرایب a, b, c, d حقیقی هستند و $ad - bc > 0$ ، تبدیل $\mathbb{H}$ را حفظ می‌کند.

۳.۶.۴ استخراج نگاشت‌های کلیدی

برای استخراج تبدیل کایلی، در نظر بگیرید:

$$w = \frac{z - i}{z + i}.$$

برای $z = x + iy$ با $y > 0$:

$$|w| = \left| \frac{z - i}{z + i} \right| = \frac{|z - i|}{|z + i|}, \quad |z - i|^2 = x^2 + (y - 1)^2, \quad |z + i|^2 = x^2 + (y + 1)^2.$$

از آنجا که $y > 0$ ، $(y - 1)^2 < (y + 1)^2$ ، بنابراین $|w| < 1$ ، که نشان می‌دهد $\mathbb{H}$ به $\mathbb{D}$ نگاشت می‌شود. برای $y = 0$ (محور حقیقی)، $|w| = 1$ ، که به دایره واحد نگاشت می‌شود.

برای نگاشت‌هایی که $\mathbb{H}$ را حفظ می‌کنند، در نظر بگیرید $w = \frac{az+b}{cz+d}$ با ضرایب حقیقی و $ad - bc > 0$. بخش موهومی w به صورت زیر است:

$$\operatorname{Im}(w) = \frac{(ad - bc)y}{|cz + d|^2},$$

که برای $y > 0$ مثبت است اگر $ad - bc > 0$ ، که حفظ $\mathbb{H}$ را تضمین می‌کند.

۶.۴ نگاشت‌های نیمه صفحه بالایی

۴.۶.۴ مثال‌های گویا

مثال‌های زیر رفتار این نگاشت‌ها را نشان می‌دهند:

(آ) تبدیل کایلی: تبدیل:

$$w = \frac{z - i}{z + i},$$

نقطه $z = i$ را به $w = 0$ نگاشت می‌کند:

$$w = \frac{i - i}{i + i} = 0,$$

و برای $z = x \in \mathbb{R}$:

$$|w| = \left| \frac{x - i}{x + i} \right| = 1,$$

که محور حقیقی را به دایره واحد نگاشت می‌دهد.

(ب) نگاشت لگاریتمی: تبدیل $w = \log z$ ، $\mathbb{H}$ را به نوار $0 < \text{Im}(w) < \pi$ نگاشت می‌دهد.

برای $z = re^{i\theta}$ ، $0 < \theta < \pi$:

$$w = \ln r + i\theta,$$

که $\text{Im}(w) = \theta \in (0, \pi)$ است.

(ج) نگاشت به ربع اول: تبدیل $w = z^{1/2}$ (شاخه اصلی)، $\mathbb{H}$ را به ربع اول نگاشت می‌دهد.

برای $z = re^{i\theta}$ ، $0 < \theta < \pi$:

$$w = r^{1/2} e^{i\theta/2}, \quad 0 < \theta/2 < \pi/2.$$

۶.۴ نگاشت‌های نیمه صفحه بالایی

(د) نگاشت $\mathbb{H}$ به خودش: در نظر بگیرید $w = \frac{2z+1}{z+1}$ برای $z = x + iy$ ، $y > 0$:

$$w = \frac{2(x + iy) + 1}{(x + 1) + iy}.$$

بخش موهومی:

$$\text{Im}(w) = \frac{y}{(x + 1)^2 + y^2} > 0,$$

که حفظ $\mathbb{H}$ را تأیید می‌کند.

۵.۶.۴ کاربردها و نتایج

نگاشت‌های نیمه صفحه بالایی در چندین حوزه حیاتی هستند:

- معادله لاپلاس: آن‌ها مسائل مقدار مرزی را با نگاشت $\mathbb{H}$ به دامنه‌هایی مانند دیسک واحد ساده می‌کنند، که حل معادله لاپلاس را در فیزیک آسان‌تر می‌کند.
- دینامیک سیالات: برای مدل‌سازی جریان پتانسیل دوبعدی استفاده می‌شوند، که مرزهای پیچیده را به شکل‌های ساده‌تر تبدیل می‌کنند.
- الکترواستاتیک: محاسبه میدان‌های الکتریکی را با نگاشت مرزها به محور حقیقی یا دایره واحد تسهیل می‌کنند.
- هندسه هایپربولیک: نگاشت‌هایی که $\mathbb{H}$ را حفظ می‌کنند، در مطالعه صفحه هایپربولیک اساسی هستند.

یک نتیجه کلیدی این است که تبدیلات خطی کسری می‌توانند هر سه نقطه روی مرز $\mathbb{H}$ (شامل

۶.۴ نگاشت‌های نیمه صفحه بالایی

بی‌نهایت) را به هر سه نقطه روی مرز دامنه دیگر نگاشت کنند، به دلیل حفظ نسبت متقاطع.

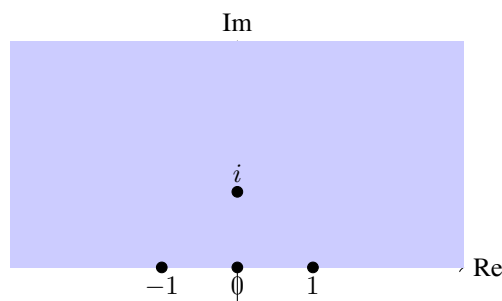
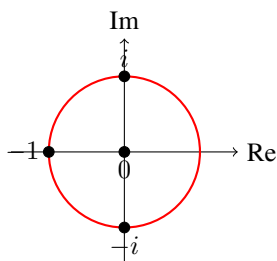
۶.۶.۴ زمینه تاریخی

نظریه نگاشت‌های نیمه صفحه بالایی در قرن نوزدهم توسط ریاضیدانانی مانند برنهارد ریمان، که نظریه نگاشت همدیس را توسعه داد، و هرمان شوارتز، که به نگاشت‌های دامنه‌های خاص کمک کرد، پیشگام شد. کارهای آن‌ها، که بر پایه‌های گذاشته شده توسط آگوستین-لویی کوشی بنا شد، اهمیت این تبدیلات را در نظریه پتانسیل و دینامیک سیالات تثبیت کرد.

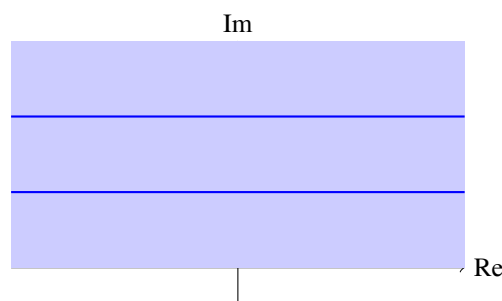
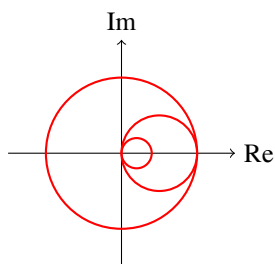
۷.۶.۴ شهود

نیمه صفحه بالایی را به عنوان یک ورق بی‌نهایت بالای محور حقیقی تصور کنید. تبدیل کایلی این ورق را به دیسک واحد می‌پیچد، به طوری که محور حقیقی به مرز دایره واحد تبدیل می‌شود و نقاط در $\mathbb{H}$ به داخل دیسک نگاشت می‌شوند. برای مثال، $z = i$ به مرکز دیسک $w = 0$ نگاشت می‌شود. نگاشت لگاریتمی $\mathbb{H}$ را به یک نوار افقی باز می‌کند، که خطوط شعاعی به خطوط افقی و دایره‌ها به خطوط عمودی تبدیل می‌شوند. این تغییر شکل‌ها نشان‌دهنده توانایی نگاشت‌ها در ساده‌سازی هندسه‌های پیچیده برای تحلیل ریاضی است.

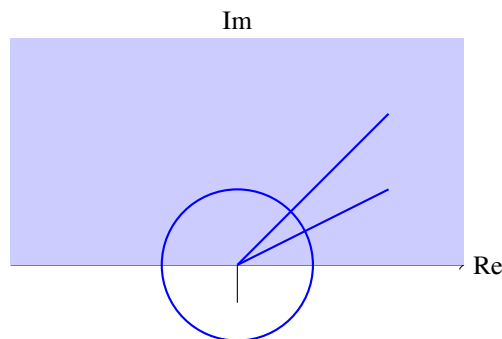
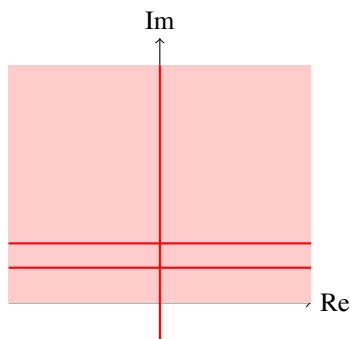
۶.۴ نگاشت‌های نیمه‌صفحه بالایی



شکل ۳۶.۴: تبدیل کیلی $w = \frac{z-i}{z+i}$ را به دیسک واحد $|w| < 1$ نگاشت می‌کند. نقاط $z = i, 0, 1, -1$ به ترتیب به $w = 0, -1, -i, i$ نگاشت می‌شوند، و محور حقیقی به دایره واحد $|w| = 1$ نگاشت می‌شود.



شکل ۳۷.۴: تبدیل کیلی $w = \frac{z-i}{z+i}$ در نیم‌صفحه بالایی را به دایره‌های $|w - 0.2| = 0.2$ و $|w - 0.5| = 0.5$ نگاشت می‌کند، که نشان می‌دهد چگونه خطوط بالاتر به مرکز نزدیک‌تر نگاشت می‌شوند.



شکل ۳۸.۴: نگاشت لگاریتمی $w = \log z$ نیم‌صفحه بالایی $\text{Im}(z) > 0$ را به نوار $0 < \text{Im}(w) < \pi$ نگاشت می‌کند. خطوط شعاعی با زوایای $\pi/4$ و $\arctan(1/2)$ به خطوط افقی $\text{Im}(w) = \pi/4$ و $\arctan(1/2)$ نگاشت می‌شوند، و دایره واحد $|z| = 1$ به خط عمودی $\text{Re}(w) = 0$ نگاشت می‌شود.

تمرین‌های زیر درک را تقویت می‌کنند، با راه‌حل‌های ارائه شده:

(آ) یافتن نگاشت هم‌دیس از نیمه صفحه بالایی به دیسک واحد که $z = 2i$ را به $w = 0$ نگاشت کند. راه‌حل: از تبدیل خطی کسری به شکل $w = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$ استفاده کنید، که در آن $z_0 = 2i$. بگذارید $\theta = 0$:

$$w = \frac{z - 2i}{z + 2i}.$$

تأیید: در $z = 2i$ ، $w = \frac{2i - 2i}{2i + 2i} = 0$. برای $z = x \in \mathbb{R}$ ، $|w| = 1$ ، و برای $y > 0$ ، $|z - 2i| < |z + 2i|$ ، بنابراین $|w| < 1$ ، که نگاشت به $\mathbb{D}$ را تأیید می‌کند.

(ب) تصویر خط عمودی $x = 1$ در $\mathbb{H}$ را تحت $w = \log z$ تعیین کنید. راه‌حل: برای $z = 1 + iy$ ، $y > 0$:

$$w = \log(1 + iy) = \ln |1 + iy| + i \arg(1 + iy) = \ln \sqrt{1 + y^2} + i \tan^{-1}(y).$$

با تغییر y از 0^+ به ∞ ، $\operatorname{Re}(w) = \ln \sqrt{1 + y^2}$ از 0 به ∞ ، و $\operatorname{Im}(w) = \tan^{-1}(y)$ از 0 به $\pi/2$ تغییر می‌کند. تصویر یک منحنی از $(0, 0)$ به $(\infty, \pi/2)$ است.

(ج) تصویر خط $y = x$ در $\mathbb{H}$ را تحت تبدیل کایلی $w = \frac{z-i}{z+i}$ بیابید. راه‌حل: برای $z = x + ix = x(1 + i)$ ، $x > 0$:

$$w = \frac{x(1 + i) - i}{x(1 + i) + i} = \frac{x + ix - i}{x + ix + i}.$$

۷.۴ تبدیل $w = \sin z$

محاسبه $|w|$:

$$|w| = \frac{\sqrt{x^2 + (x-1)^2}}{\sqrt{x^2 + (x+1)^2}} = \frac{\sqrt{2x^2 - 2x + 1}}{\sqrt{2x^2 + 2x + 1}}.$$

تصویر یک دایره در دیسک واحد است که در نقاط خاصی با دایره واحد تقاطع می‌کند.

(د) تأیید کنید که $w = \frac{2z+1}{z+1}$ نیمه صفحه بالایی را به خودش نگاشت می‌کند. راه حل: برای

$$y > 0, z = x + iy$$

$$\operatorname{Im}(w) = \frac{y}{(x+1)^2 + y^2} > 0,$$

که حفظ $\mathbb{H}$ را تأیید می‌کند.

۹.۶.۴ تمرین‌های دشوارتر

(آ) نگاشت همدیس از نیمه صفحه بالایی به نوار $\{w \mid 0 < \operatorname{Re}(w) < 1\}$ را بیابید.

(ب) تصویر دایره $|z-i|=1$ در $\mathbb{H}$ را تحت تبدیل کایلی $w = \frac{z-i}{z+i}$ تعیین کنید.

۷.۴ تبدیل $w = \sin z$

۱.۷.۴ تعریف

تابع سینوس مختلط به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

که در آن $z = x + iy$ با $x, y \in \mathbb{R}$. به طور جایگزین، می‌توان آن را به صورت مستطیلی بیان کرد:

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.$$

این تابع کلی است، یعنی در همه جا در صفحه مختلط $\mathbb{C}$ تحلیلی است. تبدیل $w = \sin z$ نقاط در صفحه z را به نقاط در صفحه w نگاشت می‌دهد، که اغلب نوارها را به نیمه‌صفحه‌ها یا ربع‌ها تبدیل می‌کند.

۲.۷.۴ ویژگی‌های اصلی

تبدیل $w = \sin z$ ویژگی‌های اساسی متعددی را نشان می‌دهد که نقش آن را در تحلیل مختلط برجسته می‌کند:

(آ) تناوب: تابع با دوره 2π تناوبی است:

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z \quad \text{برای همه } z \in \mathbb{C}.$$

این تناوب نشان می‌دهد که نگاشت هر 2π در محور حقیقی تکرار می‌شود.

(ب) همدیسی: نگاشت در نقاطی که مشتق غیر صفر است، همدیس است. مشتق به صورت زیر است:

$$\frac{d}{dz} \sin z = \cos z,$$

که در $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ صفر است. بنابراین، $w = \sin z$ زوایا را در همه جا جز در این نقاط بحرانی حفظ می‌کند.

(ج) نگاشت نوارها: تبدیل نوارهای عمودی در صفحه z را به مناطق خاص در صفحه w نگاشت می‌کند:

• نوار $\{w = u + iv \mid u \geq 0, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, y \geq 0\}$ به صورت یک به یک به ربع اول $\{w = u + iv \mid u \geq 0, v \geq 0\}$ نگاشت می‌شود.

• نوار $\{w = u + iv \mid v > 0, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, y > 0\}$ به نیمه صفحه بالایی $\{w = u + iv \mid v > 0\}$ نگاشت می‌شود.

(د) نگاشت خطوط:

• خطوط عمودی $x = c$, $0 < c < \frac{\pi}{2}$ ، به قوس‌های هذلولی در صفحه w نگاشت می‌شوند که به صورت زیر توصیف می‌شوند:

$$\frac{u^2}{\sin^2 c} - \frac{v^2}{\cos^2 c} = 1, \quad u > 0, v \geq 0,$$

۷.۴ تبدیل $w = \sin z$

با کانون‌ها در ± 1 .

• خطوط افقی $y = d$ ، $d > 0$ ، به قوس‌های بیضوی نگاشت می‌شوند:

$$\frac{u^2}{\cosh^2 d} + \frac{v^2}{\sinh^2 d} = 1, \quad u, v \geq 0,$$

با کانون‌ها در ± 1 .

(ه) تقارن: تابع فرد است:

$$\sin(-z) = -\sin z,$$

که تقارن در نگاشت‌ها را در مورد مبدأ نشان می‌دهد.

(و) دامنه مقادیر: دامنه مقادیر $\sin z$ کل صفحه مختلط است، زیرا تابع کلی غیر ثابت است، بر اساس قضیه کوچک پیکار.

۳.۷.۴ استخراج نگاشت‌های کلیدی

برای درک نگاشت نوار $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ، $y \geq 0$ به ربع اول، در نظر بگیرید:

$$w = \sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.$$

• مرز در $x = 0$: $z = iy$ ، بنابراین $w = \sin(iy) = i \sinh y$ ، که کاملاً موهومی است و

۷.۴ تبدیل $w = \sin z$

از 0 تا $i\infty$ با افزایش y از 0 تا ∞ متغیر می‌شود.

• مرز در $x = \frac{\pi}{2} : z = \frac{\pi}{2} + iy$ ، بنابراین $w = \sin\left(\frac{\pi}{2} + iy\right) = \cosh y$ ، که حقیقی است و از 1 تا ∞ متغیر می‌شود.

• مرز در $y = 0 : z = x$ ، $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ، بنابراین $w = \sin x$ ، که حقیقی است و از 0 تا 1 متغیر می‌شود.

• داخل: برای $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ، $y > 0$ ، $u = \sin x \cosh y > 0$ ، $v = \cos x \sinh y > 0$ ، که ربع اول $u > 0$ ، $v > 0$ را پوشش می‌دهد.

برای تأیید نگاشت یک به یک، توجه داشته باشید که $\sin z_1 = \sin z_2$ به معنای $z_1 = z_2 + 2k\pi$ یا $z_1 = \pi - z_2 + 2k\pi$ است. در نوار $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ، $y \geq 0$ ، این شرایط فقط برای $z_1 = z_2$ برقرار است، که تزریق‌پذیری را تضمین می‌کند.

برای نوار $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ، $y > 0$ ، $u = \sin x \cosh y$ ، $v = \cos x \sinh y > 0$ ، زیرا $\cos x > 0$ و $\sinh y > 0$ ، که $y \rightarrow \infty$ پوشش می‌دهد. نگاشت به نیمه‌صفحه بالایی $v > 0$ را تأیید می‌کند.

۴.۷.۴ مثال‌های گویا

مثال‌های زیر رفتار تبدیل را نشان می‌دهند:

(آ) نگاشت خط عمودی: در نظر بگیرید $x = \frac{\pi}{6}$ ، $z = \frac{\pi}{6} + iy$

$$w = \sin \frac{\pi}{6} \cosh y + i \cos \frac{\pi}{6} \sinh y = \frac{1}{2} \cosh y + i \frac{\sqrt{3}}{2} \sinh y.$$

این یک قوس هذلولی را ترسیم می‌کند:

$$\frac{u^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{v^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \cosh^2 y - \sinh^2 y = 1 \implies 4u^2 - \frac{4}{3}v^2 = 1.$$

(ب) نگاشت خط افقی: در نظر بگیرید $z = x + i, y = 1$

$$w = \sin x \cosh 1 + i \cos x \sinh 1.$$

این یک قوس بیضوی را ترسیم می‌کند:

$$\frac{u^2}{\cosh^2 1} + \frac{v^2}{\sinh^2 1} = \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

(ج) نگاشت نوار نیمه‌صفحه بالایی: نوار $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ، $y > 0$ به نیمه‌صفحه بالایی

$v > 0$ نگاشت می‌شود، زیرا $u = \sin x \cosh y$ کل اعداد حقیقی را پوشش می‌دهد و

$$v = \cos x \sinh y > 0.$$

۷.۴ تبدیل $w = \sin z$

۵.۷.۴ کاربردها و نتایج

تبدیل $w = \sin z$ در چندین حوزه حیاتی است:

- معادله لاپلاس: نوارها را به نیمه صفحه‌ها یا ربع‌ها نگاشت می‌دهد، که مسائل مقدار مرزی در فیزیک، مانند حل معادله لاپلاس برای میدان‌های پتانسیل، را ساده می‌کند.
- دینامیک سیالات: برای مدل‌سازی جریان پتانسیل دوبعدی استفاده می‌شود، که مرزهای پیچیده را به شکل‌های ساده‌تر تبدیل می‌کند.
- الکترواستاتیک: محاسبات میدان‌های الکتریکی را با نگاشت مرزها به خطوط یا دایره‌ها تسهیل می‌کند.

یک نتیجه کلیدی این است که تبدیل در نوارهای خاص، مانند $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ، $y \geq 0$ ، یک به یک است، که نگاشت‌های منحصر به فرد برای مسائل مقدار مرزی را فراهم می‌کند. تناوب آن نشان می‌دهد که نگاشت‌ها در نوارهای با عرض 2π تکرار می‌شوند.

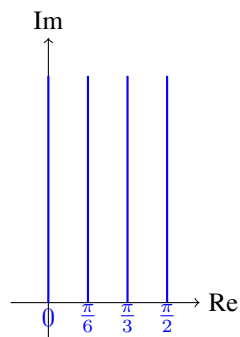
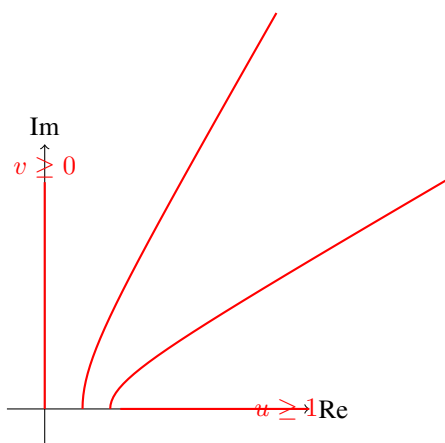
۶.۷.۴ زمینه تاریخی

ویژگی‌های نگاشت تابع سینوس مختلط در قرن نوزدهم توسط ریاضیدانانی مانند برنهارد ریمان و کارل وایرستراس، که توابع بیضوی را مطالعه کردند، و لئونارد اویلر، که توابع مثلثاتی مختلط را تعریف کرد، پیشگام شد. کارهای آن‌ها نقش این توابع را در نگاشت‌های همدیس و کاربردهای فیزیک تثبیت کرد.

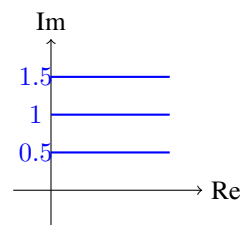
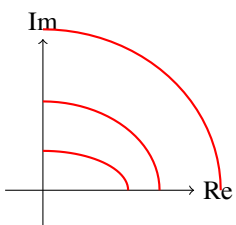
۷.۴ تبدیل $w = \sin z$

۷.۷.۴ شهود

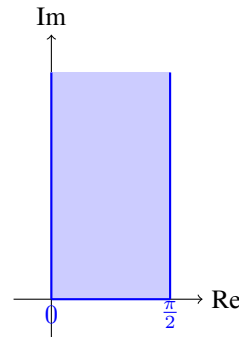
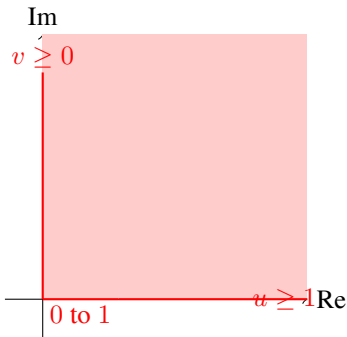
صفحه مختلط را به عنوان شبکه‌ای از خطوط عمودی و افقی، مانند پارچه‌ای بافته‌شده، تصور کنید. تحت $w = \sin z$ ، خطوط عمودی در یک نوار، مانند $x = \frac{\pi}{6}$ ، به قوس‌های هذلولی کشیده و خمیده می‌شوند، شبیه مسیره‌های دنباله‌دار، با کانون‌ها در ± 1 . خطوط افقی، مانند $y = 1$ ، به قوس‌های بیضوی بافته می‌شوند، که حلقه‌های بسته‌ای در مرکز مبدأ تشکیل می‌دهند. نوار $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ، $y \geq 0$ به ربع اول تبدیل می‌شود، با لبه عمودی در $x = 0$ که به محور موهومی مثبت و لبه در $x = \frac{\pi}{2}$ به محور حقیقی مثبت فراتر از ۱ نگاشت می‌شود. این تغییر شکل نشان می‌دهد که چگونه تابع سینوس صفحه را تحریف می‌کند، زوایا را در اکثر نقاط حفظ می‌کند و تعامل پویایی از منحنی‌ها ایجاد می‌کند.



شکل ۳۹.۴: خطوط عمودی در $x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ در صفحه z تحت تبدیل $w = \sin z$ به محور موهومی مثبت، کمان‌های هذلولی، و محور حقیقی مثبت ($u \geq 1$) در صفحه w نگاشت می‌شوند، با معادلات $\frac{u^2}{\sin^2 c} - \frac{v^2}{\cos^2 c} = 1$ برای $0 < c < \frac{\pi}{2}$.



شکل ۴۰.۴: خطوط افقی در $y = 0.5, 1, 1.5$ در صفحه z تحت تبدیل $w = \sin z$ به کمان‌های بیضوی در صفحه w نگاشت می‌شوند، با معادلات $\frac{u^2}{\cosh^2 d} + \frac{v^2}{\sinh^2 d} = 1$ ، که نقاط $(0, \sinh d)$ را به $(\cosh d, 0)$ متصل می‌کنند.



شکل ۴۱.۴: نوار $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, y \geq 0$ در صفحه z تحت تبدیل $w = \sin z$ به ربع اول $u \geq 0, v \geq 0$ در صفحه w نگاشت می‌شود. مرزهای $x = 0$ و $x = \frac{\pi}{2}$ و $y = 0$ به ترتیب به محور موهومی مثبت، محور حقیقی ($u \geq 1$) و پاره خط $[0, 1]$ نگاشت می‌شوند.

۸.۷.۴ تمرین‌ها

تمرین‌های زیر درک را تقویت می‌کنند، با راه‌حل‌های ارائه‌شده:

(آ) محاسبه $w = \sin z$ برای $z = \frac{\pi}{4} + i$. راه‌حل:

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} + i \right) = \sin \frac{\pi}{4} \cosh 1 + i \cos \frac{\pi}{4} \sinh 1 \approx 0.707 \cdot 1.543 + i \cdot 0.707 \cdot 1.175 \approx 1.091 + i0.831$$

(ب) یافتن تصویر خط $x = \frac{\pi}{6}$ تحت $w = \sin z$. راه‌حل: برای $z = \frac{\pi}{6} + iy$:

$$w = \frac{1}{2} \cosh y + i \frac{\sqrt{3}}{2} \sinh y.$$

این معادله را برآورده می‌کند:

$$4u^2 - \frac{4}{3}v^2 = 1,$$

یک هذلول در ربع اول برای $y \geq 0$.

(ج) تعیین تصویر نوار $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ، $y > 0$ تحت $w = \sin z$. راه حل: برای $z = x + iy$ ،
 $u = \sin x \cosh y$ ، $v = \cos x \sinh y$. از آنجا که $\cos x > 0$ و $\sinh y > 0$ ، $v > 0$ و u کل اعداد حقیقی را پوشش می دهد، که به نیمه صفحه بالایی $v > 0$ نگاشت می شود.

(د) یافتن تصویر خط $y = 1$ تحت $w = \sin z$. راه حل: برای $z = x + i$:

$$w = \sin x \cosh 1 + i \cos x \sinh 1.$$

این معادله را برآورده می کند:

$$\frac{u^2}{\cosh^2 1} + \frac{v^2}{\sinh^2 1} = 1,$$

یک بیضی در صفحه w .

۹.۷.۴ تمرین های دشوارتر

(آ) ثابت کنید که $w = \sin z$ نوار $0 < x < \pi$ ، $y > 0$ را به نیمه صفحه بالایی $v > 0$ نگاشت می کند و تعیین کنید که آیا یک به یک است.

۸.۴ نگاشت‌ها توسط z^2 و شاخه‌های $z^{1/2}$

(ب) تصویر مستطیل $0 < x < \pi$ ، $0 < y < 1$ را تحت $w = \sin z$ بیابید و مرز آن را توصیف کنید.

۸.۴ نگاشت‌ها توسط z^2 و شاخه‌های $z^{1/2}$

۱.۸.۴ تعریف $w = z^2$

تابع $w = z^2$ ، که در آن z یک متغیر مختلط است، یک تابع کلی است، یعنی در همه جا در صفحه مختلط $\mathbb{C}$ تحلیلی است. برای $z = re^{i\theta}$ ، که در آن $r = |z|$ و $\theta = \arg z$ ، نگاشت به صورت زیر بیان می‌شود:

$$w = r^2 e^{i2\theta}.$$

این تبدیل، مقدار را از r به r^2 مربع می‌کند و آرگمان را به 2θ دو برابر می‌کند، که به طور اساسی هندسه صفحه مختلط را تغییر می‌دهد.

۲.۸.۴ ویژگی‌های $w = z^2$

تبدیل $w = z^2$ ویژگی‌های کلیدی متعددی را نشان می‌دهد:

(آ) عدم تزریق‌پذیری: تابع یک به یک نیست، زیرا هر دو z و $-z$ به همان w نگاشت می‌شوند. برای مثال، $(1)^2 = (-1)^2 = 1$.

۸.۴ نگاشت‌ها توسط z^2 و شاخه‌های $z^{1/2}$

(ب) نگاشت پرتگاه‌ها و دایره‌ها:

- یک پرتگاه از مبدأ با زاویه θ ، $\{re^{i\theta} \mid r > 0\}$ ، به پرتگاه با زاویه 2θ نگاشت می‌شود.
- یک دایره $|z| = r$ به دایره $|w| = r^2$ نگاشت می‌شود.

(ج) نگاشت بخش‌ها: بخش $0 < \arg z < \alpha$ ، که در آن $0 < \alpha \leq \pi$ ، به $0 < \arg w < 2\alpha$ نگاشت می‌شود. برای $\alpha = \pi$ ، نیمه صفحه بالایی $\text{Im}(z) > 0$ به صفحه منهای محور حقیقی منفی $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ نگاشت می‌شود.

(د) نگاشت خطوط: خطوط عمودی $x = c$ به هذلول‌ها در صفحه w نگاشت می‌شوند. برای $z = c + iy$:

$$w = (c + iy)^2 = c^2 - y^2 + i2cy,$$

که هذلول $u = \frac{v^2}{4c^2} - c^2$ را تشکیل می‌دهد، که در آن $u = \text{Re}(w)$ ، $v = \text{Im}(w)$.

(ه) همدیسی: نگاشت در همه جا جز در $z = 0$ ، که مشتق $\frac{dw}{dz} = 2z = 0$ است، همدیس است، که نشان‌دهنده یک نقطه بحرانی است که در آن زوایا دو برابر می‌شوند.

۳.۸.۴ تفسیر هندسی $w = z^2$

تبدیل $w = z^2$ را می‌توان به عنوان کشیدن و چرخش صفحه مختلط تصور کرد. پرتگاه‌ها از مبدأ به پرتگاه‌ها با زوایا دو برابر نگاشت می‌شوند، و دایره‌های مرکز مبدأ به دایره‌ها با شعاع‌های مربع شده تبدیل می‌شوند. خطوط عمودی به هذلول‌ها تبدیل می‌شوند، که نشان‌دهنده طبیعت دوجمله‌ای

۸.۴ نگاشت‌ها توسط z^2 و شاخه‌های $z^{1/2}$

تابع است. برای مثال، دیسک واحد $|z| < 1$ به خودش نگاشت می‌شود، اما نقاط مانند z و $-z$ به همان تصویر نگاشت می‌شوند، که عدم تزریق‌پذیری را نشان می‌دهد.

۴.۸.۴ تعریف $w = z^{1/2}$

تابع جذر دوم $w = z^{1/2}$ چندمقداری است، زیرا برای هر $z \neq 0$ ، دو عدد مختلط w وجود دارد که $w^2 = z$. آن را از طریق لگاریتم مختلط تعریف می‌کنیم:

$$z^{1/2} = e^{\frac{1}{2} \log z}, \quad \log z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

برای اینکه $z^{1/2}$ یکمقداری شود، یک شاخه با محدود کردن آرگمان $\arg z$ به یک بازه خاص انتخاب می‌شود، که یک قطع شاخه را معرفی می‌کند تا ادامه‌پذیری تضمین شود.

۵.۸.۴ شاخه‌های $z^{1/2}$

شاخه‌ای از $z^{1/2}$ با انتخاب یک بازه پیوسته برای $\arg z$ تعریف می‌شود. شاخه اصلی به صورت زیر است:

$$z^{1/2} = |z|^{1/2} e^{i(\arg z)/2}, \quad -\pi < \arg z \leq \pi,$$

با یک قطع شاخه در محور حقیقی منفی $(-\infty, 0]$. شاخه‌های دیگر با جابجایی بازه آرگمان، مانند $0 < \arg z < 2\pi$ ، تعریف می‌شوند، که به:

۸.۴ نگاشت‌ها توسط z^2 و شاخه‌های $z^{1/2}$

$$z^{1/2} = |z|^{1/2} e^{i(\arg z/2 + k\pi)}, \quad k = 0, 1,$$

می‌شود. هر شاخه در صفحه قطع خود، مانند $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ برای شاخه اصلی، تحلیلی است.

۶.۸.۴ ویژگی‌های $w = z^{1/2}$

(آ) تحلیلی بودن: هر شاخه در صفحه قطع خود تحلیلی است، که قطع شاخه تکمقداری را تضمین می‌کند.

(ب) نگاشت مناطق:

- شاخه اصلی $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ را به نیمه‌صفحه راست $\text{Re}(w) > 0$ نگاشت می‌کند.
- نیمه‌صفحه بالایی $\text{Im}(z) > 0$ به ربع اول $\text{Re}(w) > 0, \text{Im}(w) > 0$ نگاشت می‌شود.

(ج) قطع شاخه: قطع شاخه، معمولاً محور حقیقی منفی، جایی است که تابع ناپیوسته است. برای مثال، نزدیک $z = -1$ از بالا، $w \approx i$ ، و از پایین، $w \approx -i$.

(د) همدیسی: تابع در صفحه قطع همدیس است، زیرا مشتق $\frac{d}{dz} z^{1/2} = \frac{1}{2z^{1/2}}$ برای $z \neq 0$ غیر صفر است.

۸.۴ نگاشت‌ها توسط z^2 و شاخه‌های $z^{1/2}$

۷.۸.۴ تفسیر هندسی $w = z^{1/2}$

تابع جذر دوم زاویه را نصف و مقدار را جذر دوم می‌کند. برای شاخه اصلی، یک دایره کامل اطراف مبدأ در صفحه z به یک نصف دایره در صفحه w نگاشت می‌شود، که نیمه صفحه راست را پوشش می‌دهد. قطع شاخه در محور حقیقی منفی جلوگیری از بازگشت تابع را تضمین می‌کند، که تکمقداری را فراهم می‌کند. این را می‌توان با استفاده از سطح ریمان، که دو ورق در نقطه شاخه $z = 0$ به هم وصل شده‌اند، تصور کرد، که امکان پیمایش پیوسته را فراهم می‌کند.

۸.۸.۴ مثال‌های گویا

(آ) نگاشت بخش توسط z^2 : بخش $0 < \arg z < \frac{\pi}{3}$ را در نظر بگیرید. برای $z = re^{i\theta}$ ،
 $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$

$$w = z^2 = r^2 e^{i2\theta}, \quad 0 < 2\theta < \frac{2\pi}{3}.$$

بخش به $0 < \arg w < \frac{2\pi}{3}$ نگاشت می‌شود.

(ب) نگاشت خط عمودی توسط z^2 : برای $z = c + iy$ ، $c > 0$:

$$w = (c + iy)^2 = c^2 - y^2 + i2cy.$$

این هذلول $u = \frac{v^2}{4c^2} - c^2$ را تشکیل می‌دهد، که به سمت چپ باز می‌شود.

۸.۴ نگاشت‌ها توسط z^2 و شاخه‌های $z^{1/2}$

(ج) شاخه اصلی $z^{1/2}$: برای $z = i$:

$$z^{1/2} = e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i).$$

برای $z = -1$ ، از بالا $(\arg z \rightarrow \pi^-)$:

$$z^{1/2} \approx e^{i\pi/2} = i.$$

از پایین $(\arg z \rightarrow -\pi^+)$ ، $z^{1/2} \approx e^{-i\pi/2} = -i$.

(د) شاخه جایگزین: شاخه‌ای با $0 < \arg z < 2\pi$ را تعریف کنید. برای $z = -1$:

$$z^{1/2} = e^{i\pi/2} = i \quad \text{یا} \quad e^{i3\pi/2} = -i,$$

بسته به انتخاب شاخه.

۹.۸.۴ کاربردها و نتایج

نگاشت‌ها توسط z^2 و $z^{1/2}$ در چندین حوزه حیاتی هستند:

- نگاشت همدیس: تبدیل $w = z^2$ بخش‌ها را به بخش‌های بزرگ‌تر نگاشت می‌کند، که در ساده‌سازی دامنه‌ها برای مسائل مقدار مرزی در فیزیک، مانند الکترواستاتیک، مفید است.

۸.۴ نگاشت‌ها توسط z^2 و شاخه‌های $z^{1/2}$

- سطوح ریمان: شاخه‌های تابع جذر دوم از طریق سطوح ریمان قابل تصور هستند، که برای درک توابع چندمقداری در تحلیل مختلط ضروری هستند.
- دینامیک سیالات: این نگاشت‌ها در مدل‌سازی جریان پتانسیل دوبعدی کمک می‌کنند، که مرزهای پیچیده را به شکل‌های ساده‌تر تبدیل می‌کنند.

نتیجه کلیدی این است که $w = z^2$ یک نگاشت دو به یک (بجز در $z = 0$) است، و $w = z^{1/2}$ نگاشت معکوس را وقتی به یک شاخه خاص محدود شود، فراهم می‌کند، که کنترل دقیق بر نگاشت‌ها را امکان‌پذیر می‌سازد.

۱۰.۸.۴ زمینه تاریخی

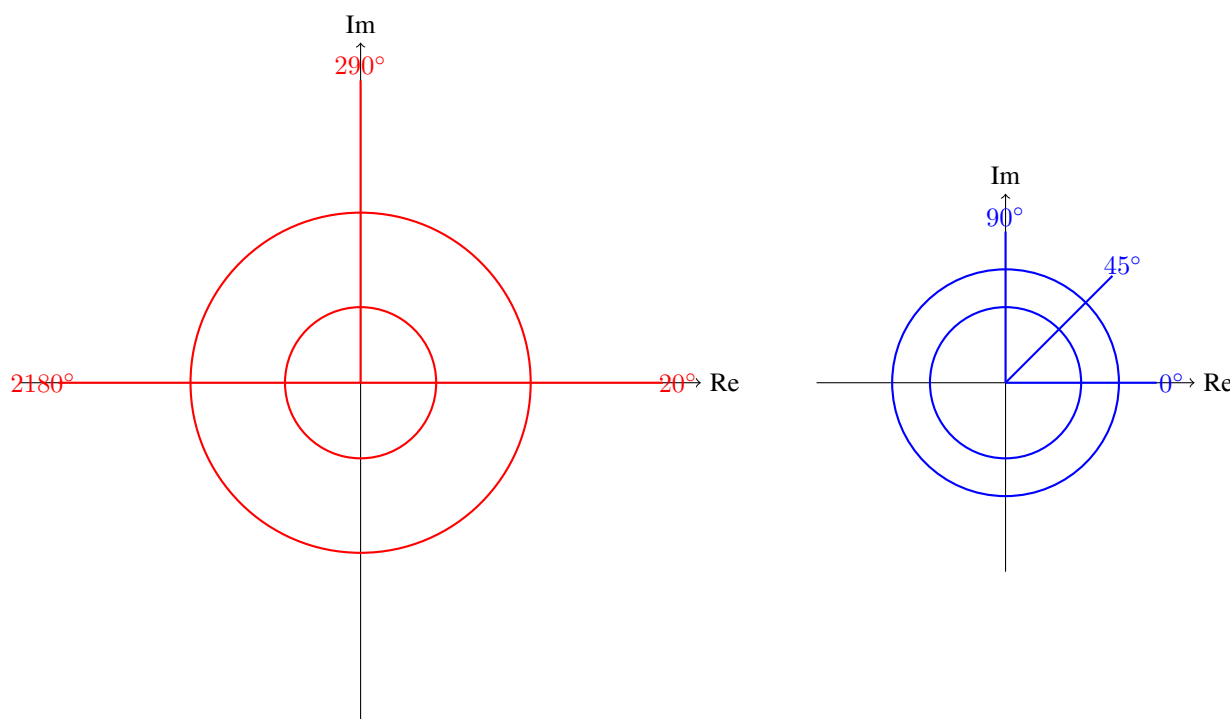
مطالعه نگاشت‌ها توسط z^2 و شاخه‌های $z^{1/2}$ در قرن نوزدهم توسط برنهارد ریمان، که سطوح ریمان را برای مدیریت توابع چندمقداری مانند جذر دوم معرفی کرد، پیشرفت کرد. کارهای او، که بر پایه مبانی گذاشته شده توسط آگوستین-لوئی کوشی و دیگران ساخته شد، چارچوب هندسی برای درک قطع شاخه‌ها و کاربردهای آنها در تحلیل مختلط فراهم کرد.

۱۱.۸.۴ شهود

صفحه مختلط را به عنوان یک بوم انعطاف‌پذیر تصور کنید. برای $w = z^2$ ، بوم کشیده و چرخانده می‌شود: یک پرتگاه با زاویه θ به پرتگاه با زاویه 2θ نگاشت می‌شود، و یک دایره با شعاع r به دایره با شعاع r^2 تبدیل می‌شود. یک بخش مانند $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$ به $0 < \arg w < \frac{\pi}{2}$ باز می‌شود، که گستره زاویه‌ای آن را دو برابر می‌کند. خطوط عمودی به هذلول‌ها تبدیل می‌شوند، که به

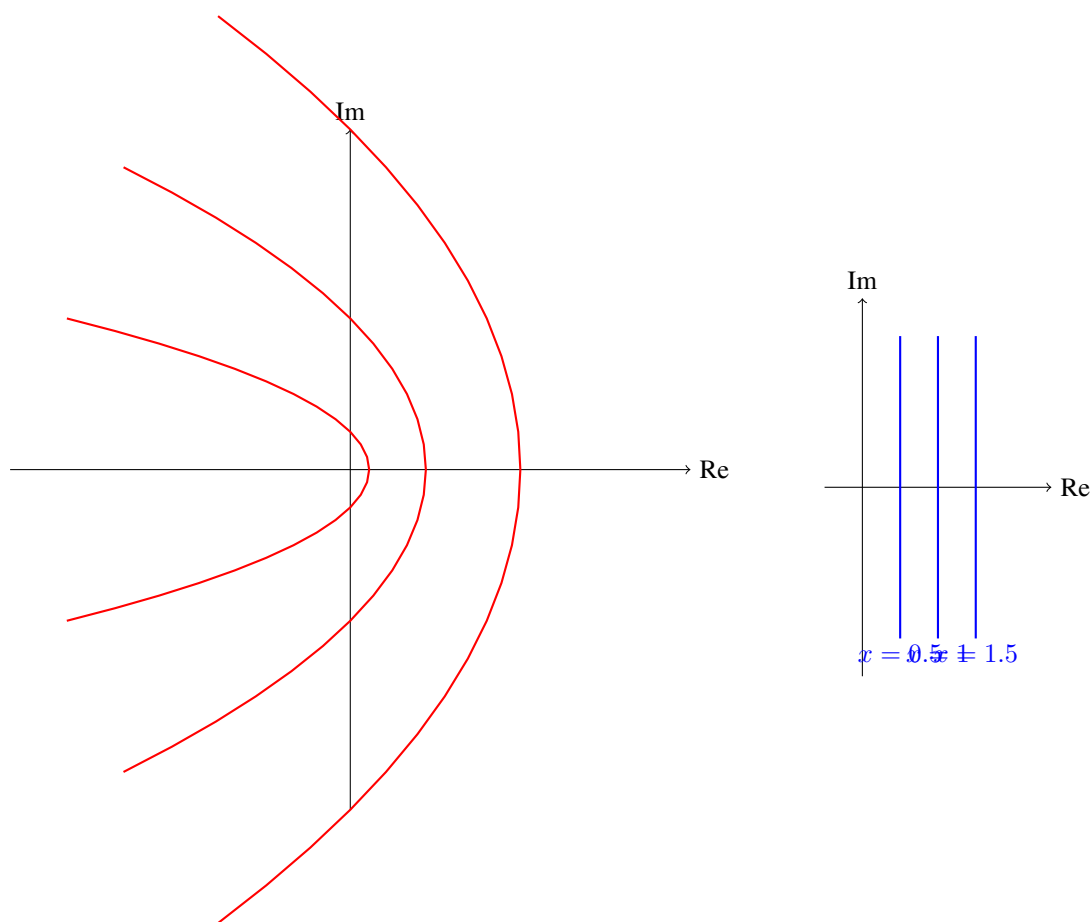
۸.۴ نگاشت‌ها توسط z^2 و شاخه‌های $z^{1/2}$

سمت چپ باز می‌شوند، به طوری که نقاطی مانند $z = c + iy$ به $w = c^2 - y^2 + i2cy$ نگاشت می‌شوند. برای $w = z^{1/2}$ ، بوم به دو ورق تقسیم می‌شود، که در مبدأ (نقطه شاخه) به هم وصل شده‌اند. شاخه اصلی صفحه منهای محور حقیقی منفی را به نیمه صفحه راست نگاشت می‌کند، زوایا را نصف و مقادیر را جذر دوم می‌کند. عبور از محور حقیقی منفی باعث پرش بین ورق‌ها می‌شود، که به صورت سطح ریمان تصور می‌شود، جایی که دو شاخه همزیستی دارند و امکان پیمایش پیوسته را فراهم می‌کنند.



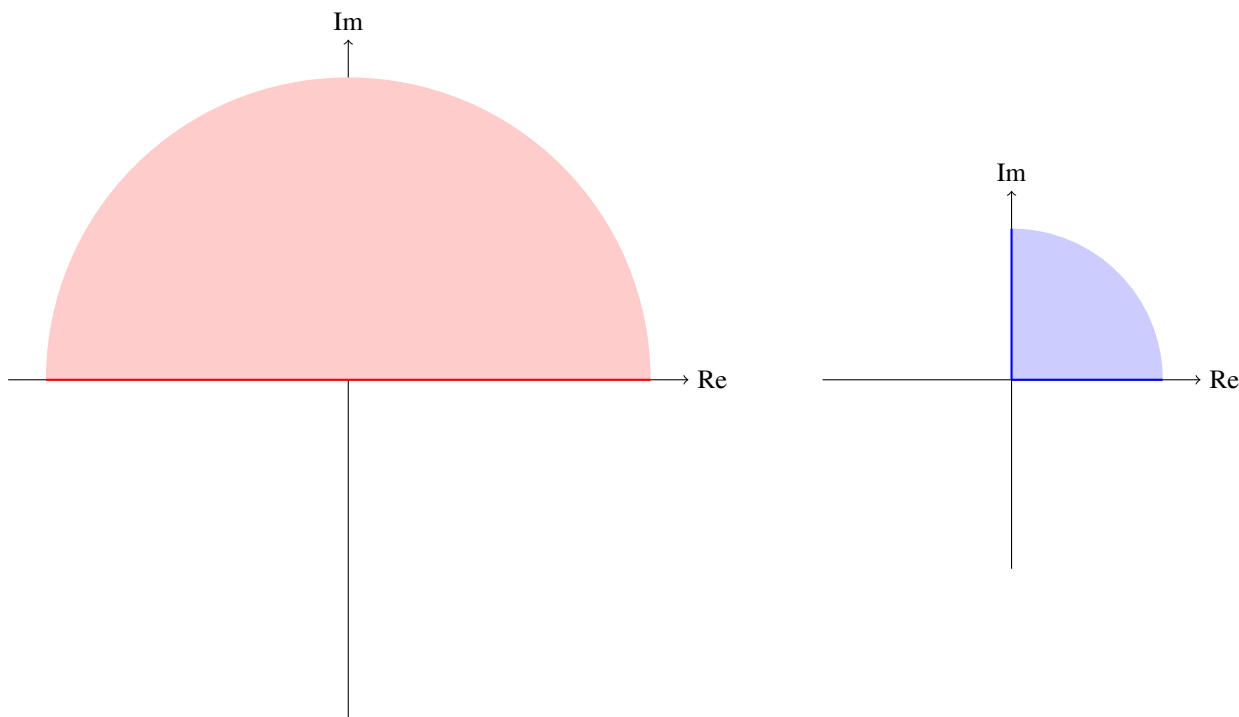
شکل ۴۲.۴: تبدیل $w = z^2$ پرتوهای با زوایای $\theta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ را به پرتوهای با زوایای $2\theta = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ و دایره‌های $|z| = r$ را به دایره‌های $|w| = r^2$ نگاشت می‌کند، که در آن $r = 1, 1.5$ به $r^2 = 1, 2.25$ نگاشت می‌شوند.

۸.۴ نگاشت‌ها توسط z^2 و شاخه‌های $z^{1/2}$

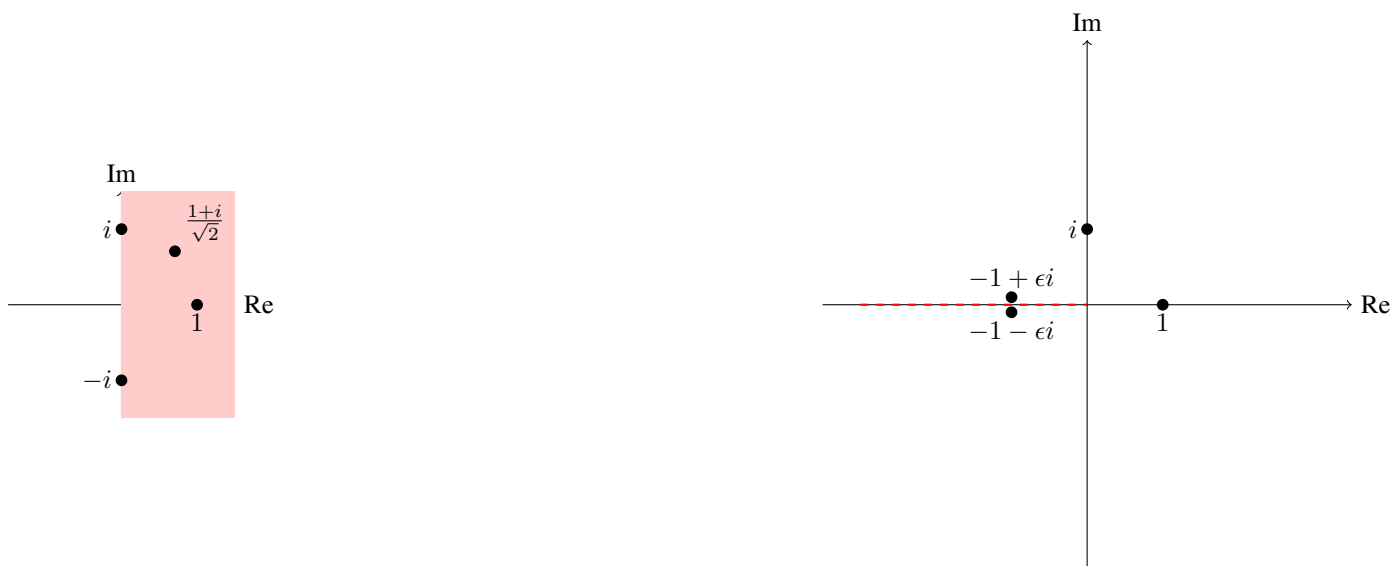


شکل ۴۳.۴: خطوط عمودی $x = 0.5, 1, 1.5$ در صفحه z تحت تبدیل $w = z^2$ به سهمی‌های $u = c^2 - \frac{v^2}{4c^2}$ در صفحه w نگاشت می‌شوند، جایی که $u = c^2 - y^2$ ، $v = 2cy$.

نگاشت‌ها توسط z^2 و شاخه‌های $z^{1/2}$ ۸.۴

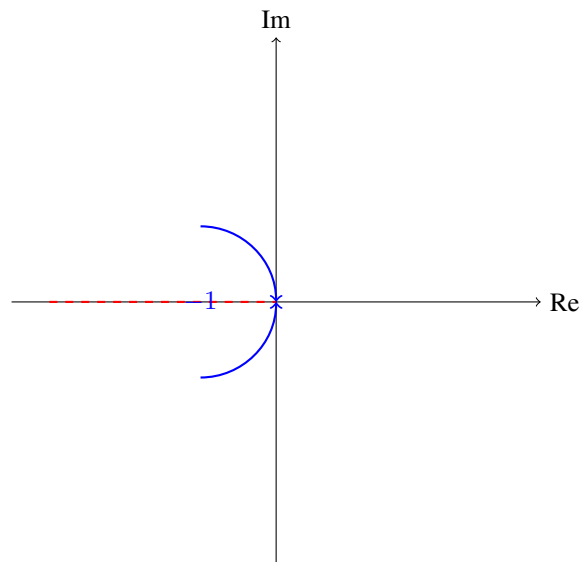
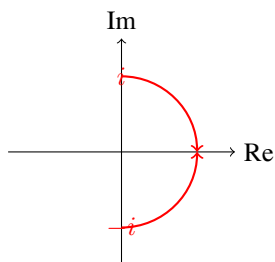


شکل ۴۴.۴: ربع اول $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$ در صفحه z تحت تبدیل $w = z^2$ به نیم‌صفحه بالایی $0 < \arg w < \pi$ نگاشت می‌شود، با مرزهای $0, \frac{\pi}{2}$ که به $\arg w = 0, \pi$ نگاشت می‌شوند.

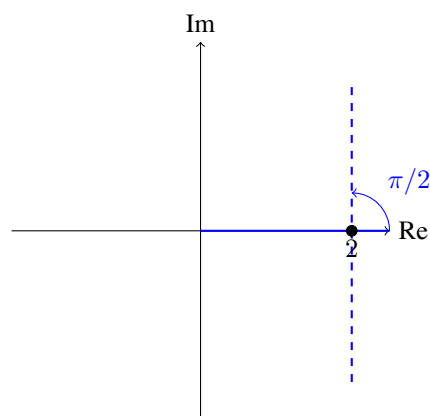
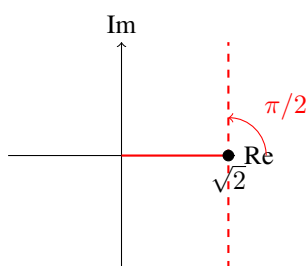


شکل ۴۵.۴: شاخه اصلی $w = z^{1/2}$ با برش شاخه در امتداد $(-\infty, 0]$ ، مجموعه $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ را به $\text{Re}(w) > 0$ نگاشت می‌کند. نقاط $z = 1, i, -1 + \epsilon i, -1 - \epsilon i$ به ترتیب به $w = 1, \frac{1+i}{\sqrt{2}}, i, -i$ نگاشت می‌شوند.

۸.۴ نگاشت‌ها توسط z^2 و شاخه‌های $z^{1/2}$



شکل ۴۶.۴: برش شاخه در امتداد $(-\infty, 0]$ باعث ناپیوستگی می‌شود: نزدیک شدن به $z = -1$ از بالا $(\arg z \rightarrow \pi^-)$ به $w \rightarrow i$ و از پایین $(\arg z \rightarrow -\pi^+)$ به $w \rightarrow -i$ تحت شاخه اصلی $w = z^{1/2}$ نگاشت می‌شود.



شکل ۴۷.۴: هم‌نگاری: شاخه اصلی تبدیل $w = z^{1/2}$ زاویه $\pi/2$ بین محور حقیقی و خط $x = 2$ را در $z = 2$ حفظ می‌کند و به محور حقیقی و خط $u = \sqrt{2}$ در $w = \sqrt{2}$ نگاشت می‌دهد.

۱۲.۸.۴ تمرینات

تمرینات زیر درک را تقویت می‌کنند، با پاسخ‌های ارائه شده:

(آ) پیدا کردن تصویر بخش $0 < \arg z < \frac{\pi}{3}$ تحت $w = z^2$ برای $z = re^{i\theta}$ ، $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$:

$$w = r^2 e^{i2\theta}, \quad 0 < 2\theta < \frac{2\pi}{3}.$$

تصویر، بخش $0 < \arg w < \frac{2\pi}{3}$ است.

(ب) تعیین تصویر خط عمودی $x = 1$ تحت $w = z^2$ برای $z = 1 + iy$:

$$w = (1 + iy)^2 = 1 - y^2 + i2y.$$

بگذارید $w = u + iv$ ، بنابراین $u = 1 - y^2$ ، $v = 2y$. سپس $y = \frac{v}{2}$ ، و:

$$u = 1 - \left(\frac{v}{2}\right)^2 = 1 - \frac{v^2}{4}.$$

تصویر، هذلول $u = 1 - \frac{v^2}{4}$ است.

(ج) محاسبه $z^{1/2}$ برای $z = i$ با استفاده از شاخه اصلی: برای $z = i$ ، $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$:

۹.۴ جذر دوم چندجمله‌ای‌ها

$$z^{1/2} = |i|^{1/2} e^{i\pi/4} = e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i).$$

(د) تعریف شاخه‌ای از $z^{1/2}$ پیوسته در $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ و محاسبه $z^{1/2}$ برای $z = -1$: آرگمان $\arg z \in (0, 2\pi)$ را انتخاب کنید. برای $z = -1$ ، $\arg(-1) = \pi$:

$$z^{1/2} = e^{i\pi/2} = i.$$

۱۳.۸.۴ تمرینات دشوارتر

(آ) تصویر مستطیل $0 < x < 1$ ، $0 < y < 1$ تحت $w = z^2$ را توصیف کنید و مرز آن را تعیین کنید.

(ب) شاخه‌ای از $f(z) = (z^2 - 1)^{1/2}$ را انتخاب کنید که در نیمه صفحه بالایی $\text{Im}(z) > 0$ تحلیلی باشد، و مشتق آن را در $z = i$ پیدا کنید.

۹.۴ جذر دوم چندجمله‌ای‌ها

۱.۹.۴ تعریف

جذر دوم یک چندجمله‌ای $P(z)$ با ضرایب مختلط، به صورت $w = \sqrt{P(z)}$ یا $w = P(z)^{1/2}$ تعریف می‌شود، به طوری که $w^2 = P(z)$. در صفحه مختلط، این تابع چندمقداری است، زیرا برای هر $z \neq 0$ که $P(z) \neq 0$ ، دو مقدار ممکن برای w وجود دارد. برای ایجاد یک تابع یکمقداری،

۹.۴ جذر دوم چندجمله‌ای‌ها

قطع شاخه‌هایی معرفی می‌شوند، معمولاً ریشه‌های $P(z) = 0$ را به هم متصل می‌کنند یا تا بی‌نهایت گسترش می‌یابند.

۲.۹.۴ ویژگی‌های اصلی

جذر دوم یک چندجمله‌ای $P(z)$ با درجه n ویژگی‌های کلیدی زیر را نشان می‌دهد:

- (آ) نقاط شاخه: این نقاط در ریشه‌های $P(z) = 0$ (مانند $z_1, z_2, \dots, z_n$) و در بی‌نهایت، اگر n زوج باشد، رخ می‌دهند، جایی که تابع چندمقداری می‌شود.
- (ب) قطع شاخه: برای تضمین تک‌مقداری، برش‌هایی ایجاد می‌شوند، مانند خطی در محور حقیقی از -1 تا 1 برای $P(z) = z^2 - 1$.
- (ج) تحلیلی بودن: هر شاخه در صفحه مختلط به جز قطع شاخه‌ها تحلیلی (هولومورفیک) است.
- (د) همدیسی: تابع در نقاطی که مشتق آن غیر صفر است، همدیس (حافظ زاویه) است. مشتق به صورت زیر است:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{P'(z)}{2\sqrt{P(z)'}}$$

که در ریشه‌های $P(z)$ یا جایی که $\sqrt{P(z)} = 0$ صفر است.

- (ه) سطوح ریمان: تابع کامل روی یک سطح ریمان دو ورقی تعریف می‌شود، که هر ورق به یکی از دو مقدار ممکن جذر دوم مربوط است.
- (و) رفتار مجانبی: برای $|z|$ بزرگ، اگر $P(z)$ یک چندجمله‌ای کمین با درجه n باشد، $P(z)^{1/2} \approx z^{n/2}$ ، که رفتار نگاشت نزدیک بی‌نهایت را تحت تأثیر قرار می‌دهد.

۹.۴ جذر دوم چند جمله‌ای‌ها

(ز) خواص نگاشت: بسته به شاخه انتخاب شده، $P(z)^{1/2}$ مناطق در صفحه z (مانند نیمه صفحه‌ها یا بخش‌ها) را به مناطق ساده‌تر در صفحه w ، مانند نیمه صفحه‌ها یا ربع‌ها، نگاشت می‌کند.

۳.۹.۴ استخراج ویژگی‌های کلیدی

برای استخراج ویژگی‌ها، چند جمله‌ای $P(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ را در نظر بگیرید. جذر دوم $w = P(z)^{1/2}$ به صورت $w^2 = P(z)$ است. با استفاده از لگاریتم مختلط:

$$w = e^{\frac{1}{2} \log P(z)}, \quad \log P(z) = \ln |P(z)| + i(\arg P(z) + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

ماهیت چندمقداری از ترم $2k\pi$ ناشی می‌شود، که دو شاخه ($k = 0, 1$) ایجاد می‌کند. نقاط شاخه در جایی رخ می‌دهند که $P(z) = 0$ ، زیرا $\arg P(z)$ تعریف نشده می‌شود، و در بی‌نهایت برای n زوج. یک قطع شاخه، مانند خطی بین ریشه‌ها، تک‌مقداری را تضمین می‌کند. مشتق:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P'(z)}{P(z)^{1/2}},$$

به جز در ریشه‌ها تحلیلی است، که همدیسی را در نقاط غیر صفر تأیید می‌کند.

۴.۹.۴ مثال‌های گویا

مثال‌های زیر رفتار جذر دوم چند جمله‌ای‌ها را نشان می‌دهند:

(آ) جذر دوم z : برای $P(z) = z$ ، تابع $w = z^{1/2}$ در $z = 0$ و بی‌نهایت نقطه شاخه دارد.

شاخه اصلی، با قطع در $(-\infty, 0]$ ، به صورت:

$$z^{1/2} = |z|^{1/2} e^{i(z)/2}, \quad -\pi < (z) \leq \pi,$$

است. برای $z = i$ ، $(i) = \frac{\pi}{2}$:

$$w = e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i).$$

نیمه صفحه بالایی $\text{Im}(z) > 0$ به ربع اول $\text{Re}(w) > 0$ ، $\text{Im}(w) > 0$ نگاشت می‌شود.

(ب) جذر دوم $z^2 - 1$: برای $P(z) = z^2 - 1$ ، با ریشه‌ها در $z = \pm 1$ ، $w = (z^2 - 1)^{1/2}$ ، در $z = 1$ ، $z = -1$ و بی‌نهایت نقاط شاخه دارد. با انتخاب قطع شاخه در $[-1, 1]$ ، برای $z = 2$:

$$z^2 - 1 = 3, \quad w = \sqrt{3} \approx 1.732,$$

با انتخاب ریشه مثبت برای شاخه اصلی. خارج از $[-1, 1]$ به نیمه صفحه راست $\text{Re}(w) > 0$ نگاشت می‌شود.

(ج) جذر دوم $z(z - 1)$: برای $P(z) = z(z - 1)$ ، با ریشه‌ها در $z = 0$ ، $z = 1$ ، قطع شاخه‌ای از ۰ تا ۱ انتخاب کنید. برای $z = 2$:

$$z(z - 1) = 2 \cdot 1 = 2, \quad w = \sqrt{2} \approx 1.414.$$

صفحه منهای قطع به یک نیمه صفحه نگاشت می‌شود، بسته به شاخه.

(د) نگاشت نیمه صفحه بالایی: برای $P(z) = z$ ، شاخه اصلی $z^{1/2}$ نیمه صفحه بالایی $\text{Im}(z) > 0$ را به ربع اول $\text{Re}(w) > 0$ ، $\text{Im}(w) > 0$ نگاشت می‌کند. برای $z = re^{i\theta}$

۹.۴ جذر دوم چند جمله‌ای‌ها

$$0 < \theta < \pi$$

$$w = \sqrt{r}e^{i\theta/2}, \quad 0 < \theta/2 < \pi/2.$$

۵.۹.۴ کاربردها و نتایج

جذر دوم چند جمله‌ای‌ها در چندین حوزه حیاتی هستند:

- **نگاشت‌های همدیس:** آنها دامنه‌های پیچیده با شکاف یا اجزای چندگانه را به دامنه‌های ساده‌تر مانند نیمه صفحه‌ها تبدیل می‌کنند، که در حل مسائل مقدار مرزی در فیزیک، مانند الکترواستاتیک، مفید است.
 - **الکترواستاتیک:** برای مدل‌سازی میدان‌های الکتریکی اطراف هادی‌ها، مانند صفحات موازی، با ساده‌سازی هندسه‌ها استفاده می‌شود.
 - **دینامیک سیالات:** در مدل‌سازی جریان اطراف موانع یا از طریق کانال‌ها با تبدیل دامنه‌ها کمک می‌کند.
 - **سطوح ریمان:** برای درک رفتار جهانی توابع چندمقداری ضروری هستند.
 - **انتگرال‌گیری مسیری:** قطع شاخه‌ها برای ارزیابی انتگرال‌های شامل جذر دوم‌ها، مانند در نظریه پتانسیل، حیاتی هستند.
- یک نتیجه کلیدی این است که $P(z)^{1/2}$ دقیقاً دو شاخه دارد، و سطح ریمان آن شامل دو ورق است که در نقاط شاخه به هم متصل شده‌اند، که کنترل دقیق بر نگاشت‌ها را امکان‌پذیر می‌کند.

۹.۴ جذر دوم چندجمله‌ای‌ها

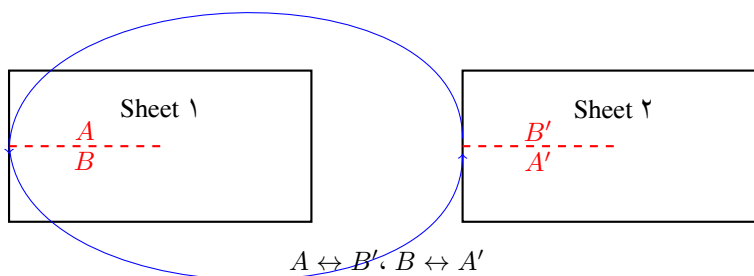
۶.۹.۴ زمینه تاریخی

مطالعه جذر دوم چندجمله‌ای‌ها و شاخه‌های آن‌ها در قرن نوزدهم توسط برنهارد ریمان، که سطوح ریمان را برای مدیریت توابع چندمقداری معرفی کرد، پیشرفت کرد. کارهای او، که بر پایه‌های گذاشته‌شده توسط آگوستین-لویی کوشی بنا شد، چارچوبی هندسی برای درک قطع شاخه‌ها و کاربردهای آن‌ها در تحلیل مختلط فراهم کرد.

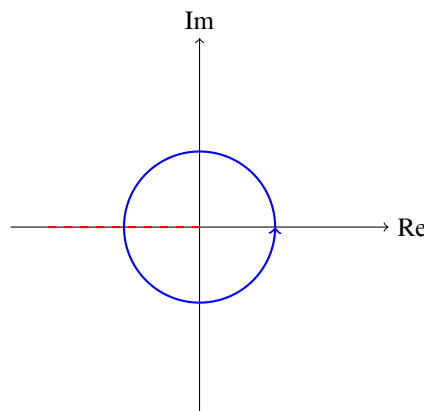
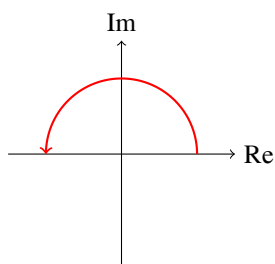
۷.۹.۴ شهود

صفحه مختلط را به عنوان بومی تصور کنید که توسط ریشه‌های چندجمله‌ای $P(z)$ ، مانند $z = \pm 1$ برای $P(z) = z^2 - 1$ ، علامت‌گذاری شده است. تابع $w = \sqrt{P(z)}$ یک سطح ریمان دو ورقی ایجاد می‌کند، مانند دو بوم روی هم که در این ریشه‌ها (نقاط شاخه) به هم متصل شده‌اند. حرکت در اطراف یک ریشه، مانند $z = 1$ ، شما را از یک ورق به ورق دیگر منتقل می‌کند و علامت w را تغییر می‌دهد. یک قطع شاخه، مانند خطی از -1 تا 1 ، به عنوان مانعی عمل می‌کند که تابع را در هر ورق یک‌مقداری نگه می‌دارد. برای $P(z) = z$ ، شاخه اصلی $z^{1/2}$ صفحه منهای محور حقیقی منفی را به نیمه صفحه راست نگاشت می‌کند، زوایا را نصف و مقادیر را جذر دوم می‌کند.

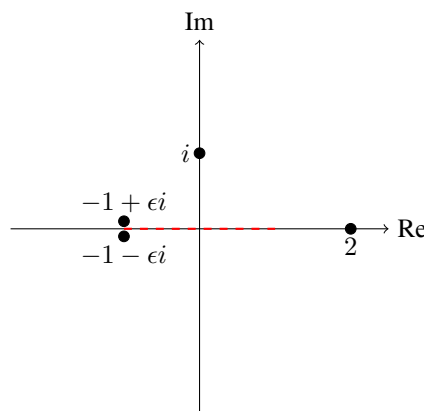
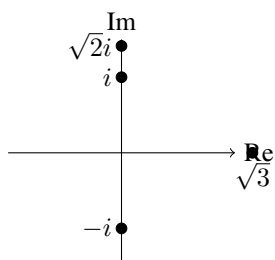
۹.۴ جذر دوم چند جمله‌ای‌ها



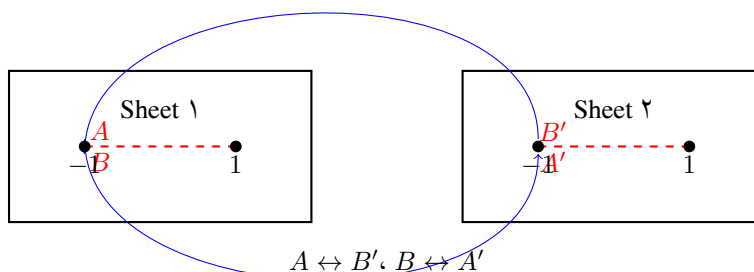
شکل ۴۸.۴: طرح شماتیک سطح ریمان برای $w = \sqrt{z}$ ، که دو صفحه را نشان می‌دهد که در امتداد برش شاخه $(-\infty, 0]$ به هم متصل شده‌اند. لبه بالایی (A) برش در صفحه ۱ به لبه پایینی (B') در صفحه ۲ متصل می‌شود، و بالعکس (A' به B).



شکل ۴۹.۴: دایره $|z| = 1$ در صفحه z تحت تبدیل $w = \sqrt{z}$ (شاخه اصلی) به یک نیم‌دایره در صفحه w نگاشت می‌شود، از $w = 1$ تا $w = -1$ از طریق نیم‌صفحه بالایی، که نقطه انشعاب در $z = 0$ را نشان می‌دهد.



شکل ۵۰.۴: شاخه اصلی $w = \sqrt{z^2 - 1}$ با برش شاخه در امتداد $[-1, 1]$ نقاط $z = 2, i, -1 + \epsilon i, -1 - \epsilon i$ را به ترتیب به $w = \sqrt{3}, \sqrt{2}i, i, -i$ نگاشت می‌کند، که اثر نقاط انشعاب در $z = \pm 1$ را نشان می‌دهد.



شکل ۵۱.۴: طرح شماتیک سطح ریمان برای $w = \sqrt{z^2 - 1}$ ، که دو صفحه را نشان می‌دهد که در امتداد برش شاخه $[-1, 1]$ به هم متصل شده‌اند. لبه بالایی (A) برش در صفحه ۱ به لبه پایینی (B') در صفحه ۲ متصل می‌شود، و بالعکس (A' به B)، با نقاط انشعاب در $z = \pm 1$.

۸.۹.۴ تمرین‌ها

تمرین‌های زیر درک را تقویت می‌کنند، با راه‌حل‌های ارائه‌شده برای وضوح:

(آ) تعریف شاخه‌ای از $\sqrt{z^2 + 1}$ که در $\mathbb{C} \setminus [-i, i]$ تحلیلی باشد. راه‌حل: چند جمله‌ای $z^2 + 1$ ریشه‌هایی در $z = \pm i$ دارد. یک قطع شاخه در محور موهومی از $-i$ تا i انتخاب کنید. تعریف کنید:

$$\sqrt{z^2 + 1} = e^{\frac{1}{2} \log(z^2 + 1)},$$

که در آن $\log$ لگاریتم اصلی با $-\pi < \text{Im}(\log) \leq \pi$ است. این شاخه در $\mathbb{C} \setminus [-i, i]$ تحلیلی است.

(ب) یافتن تصویر نیمه‌صفحه بالایی تحت $w = \sqrt{z}$ با استفاده از شاخه اصلی. راه‌حل: برای $0 < \theta < \pi$ ، $z = re^{i\theta}$

$$w = \sqrt{r}e^{i\theta/2}, \quad 0 < \theta/2 < \pi/2,$$

۹.۴ جذر دوم چندجمله‌ای‌ها

که به ربع اول $\text{Re}(w) > 0$ ، $\text{Im}(w) > 0$ نگاشت می‌شود.

(ج) تعیین تعداد شاخه‌ها برای $\sqrt{P(z)}$ که در آن $P(z)$ چندجمله‌ای با درجه ۴ است. راه‌حل: از آنجا که $P(z)^{1/2}$ یک جذر دوم است، دقیقاً دو شاخه دارد، صرف‌نظر از درجه $P(z)$.

(د) محاسبه $\sqrt{z^2 - 1}$ در $z = 2$ با استفاده از شاخه اصلی با قطع در $[-1, 1]$. راه‌حل: برای $z = 2$ ، $z^2 - 1 = 3$ ، و از آنجا که ۲ حقیقی و مثبت است، خارج از قطع:

$$\sqrt{3} = e^{\frac{1}{2} \ln 3} \approx 1.732,$$

با انتخاب ریشه مثبت برای شاخه اصلی.

(ه) یافتن مشتق $w = \sqrt{z(z-1)}$ در $z = 2$ برای شاخه‌ای تحلیلی در $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$. راه‌حل: تعریف کنید $w = \sqrt{z(z-1)}$ مشتق:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{(z(z-1))'}{2\sqrt{z(z-1)}} = \frac{2z-1}{2\sqrt{z(z-1)}}.$$

در $z = 2$ ، $z(z-1) = 2 \cdot 1 = 2$ ، بنابراین $\sqrt{2} \approx 1.414$. پس:

$$\left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=2} = \frac{2 \cdot 2 - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \approx 1.061.$$

۹.۹.۴ تمرین‌های دشوارتر

(آ) یک نگاشت هم‌دیس با استفاده از $\sqrt{z^2 - 1}$ برای تبدیل خارج دو شکاف در $[-1, 0]$ و $[0, 1]$ به یک دامنه ساده‌تر بسازید.

(ب) رفتار $\sqrt{P(z)}$ را نزدیک نقاط شاخه‌اش برای یک چندجمله‌ای عمومی $P(z)$ تحلیل کنید و بحث کنید که چگونه این بر انتخاب قطع شاخه تأثیر می‌گذارد.

۱۰.۴ سطوح ریمان

۱.۱۰.۴ تعریف

سطح ریمان یک منیفولد مختلط متصل با ابعاد مختلط یک است. این به این معناست که یک فضای توپولوژیکی است که هاسدورف و دوم‌شمار است، مجهز به یک اصل از نمودارها که زیرمجموعه‌های باز سطح را به زیرمجموعه‌های باز صفحه مختلط $\mathbb{C}$ نگاشت می‌کنند، به طوری که تابع‌های گذار بین نمودارهای همپوشان هولومورفیک (در هر نقطه از دامنه‌اش مشتق پذیر و تحلیلی باشد) هستند. به طور رسمی، برای یک سطح ریمان X ، مجموعه‌ای از جفت‌ها (U_α, ϕ_α) وجود دارد، که در آن $U_\alpha \subset X$ زیرمجموعه‌های باز پوشاننده X هستند، و $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ هولومورفیسم‌ها بر تصاویر خود هستند. برای هر نمودارهای همپوشان $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ، تابع گذار:

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

هولومورفیک است. به طور جایگزین، یک سطح ریمان می‌تواند به عنوان یک منیفولد حقیقی دوبعدی متصل و سمت‌دار، مجهز به یک ساختار هم‌مدیس، دیده شود که اندازه‌گیری زوایا را ممکن می‌سازد و تعریف توابع هولومورفیک را تسهیل می‌کند.

سطوح ریمان ویژگی‌های اساسی متعددی را نشان می‌دهند که اهمیت آن‌ها در تحلیل مختلط را تضمین می‌کنند:

(آ) قابل سمت‌دار کردن بودن: هر سطح ریمان قابل سمت‌دار کردن است، زیرا ساختار مختلط آن یک سمت‌داری متوالی در سراسر سطح را از طریق دترمینان‌های ماتریس مثبت توابع گذار هولومورفیک تضمین می‌کند.

(ب) توابع هولومورفیک:

- در سطوح ریمان غیرمتراکم، توابع هولومورفیک (در هر نقطه از دامنه اش مشتق پذیر و تحلیلی باشد) غیرثابت وجود دارند، مانند تابع هویت در $\mathbb{C}$.

- در سطوح ریمان متراکم، همه توابع هولومورفیک ثابت هستند، که پیامد اصل حداکثر مدول است، که می‌گوید یک تابع هولومورفیک غیرثابت در یک دامنه متراکم، حداکثر خود را روی مرز به دست می‌آورد، که در سطوح متراکم وجود ندارد.

(ج) توابع مرومورفیک: سطوح ریمان متراکم توابع مرومورفیک غیرثابت را پذیرفته‌اند، که هولومورفیک هستند به جز در نقاط قطب منفرد، که برای طبقه‌بندی و مطالعه آن‌ها از طریق قضایا مانند ریمان-روش حیاتی هستند.

(د) منحنی‌های جبری: بر اساس قضیه چاو، هر سطح ریمان متراکم می‌تواند در فضای پروژکتیو به عنوان یک منحنی جبری مختلط جاسازی شود، که ارتباط عمیقی با هندسه جبری ایجاد می‌کند.

(ه) طبقه‌بندی: سطوح ریمان بر اساس پوشش جهانی خود به سه نوع طبقه‌بندی می‌شوند:

- بیضوی: پوشش جهانی صفحه ریمان $\mathbb{CP}^1$ است، مثلاً صفحه ریمان خود.
- پارابولیک: پوشش جهانی صفحه مختلط $\mathbb{C}$ است، مثلاً $\mathbb{C}$ ، استوانه‌ها یا تورها.
- هایپربولیک: پوشش جهانی دیسک باز یا نیمه‌صفحه بالایی است، مثلاً سطوح با جنس $g \geq 2$.

۳.۱۰.۴ استخراج ویژگی‌های کلیدی

برای استخراج ویژگی که سطوح ریمان متراکم فقط توابع هولومورفیک (در هر نقطه از دامنه اش مشتق پذیر و تحلیلی باشد) ثابت دارند، یک تابع هولومورفیک $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ را در یک سطح ریمان متراکم X در نظر بگیرید. از آنجا که X متراکم است، مدول $|f|$ پیوسته است و حداکثر خود را در یک نقطه $p \in X$ به دست می‌آورد. بر اساس اصل حداکثر مدول، اگر f غیرثابت باشد، $|f|$ حداکثر خود را فقط روی مرز به دست می‌آورد، اما X مرز ندارد. بنابراین، $|f|$ ثابت است، که نشان‌دهنده ثابت بودن f است.

برای ویژگی قابل سمت‌دار کردن، توجه داشته باشید که توابع گذار $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ هولومورفیک هستند، با مشتقات غیر صفر. ماتریس یک تابع هولومورفیک $h(z) = u + iv$ به صورت زیر است:

$$J = \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix},$$

با درمیانان $|h'(z)|^2 > 0$ ، که سمت‌داری مثبت را تضمین می‌کند و X را قابل سمت‌دار کردن

۴.۱۰.۴ مثال‌های گویا

مثال‌های زیر ساختار و رفتار سطوح ریمان را نشان می‌دهند:

(آ) صفحه مختلط $\mathbb{C}$: ساده‌ترین سطح ریمان، با یک نمودار تکی به صورت نقشه هویت

$\phi(z) = z$ غیرمتراکم است و توابع هولومورفیک (در هر نقطه از دامنه اش مشتق پذیر و

تحلیلی باشد) غیرثابت را پذیرفته است، مانند $f(z) = z$.

(ب) صفحه ریمان $\mathbb{CP}^1$: صفحه مختلط گسترش یافته $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ، که توسط دو نمودار پوشانده

شده است:

$$\bullet \phi_1(z) = z, U_1 = \mathbb{C}.$$

$$\bullet \phi_2(\infty) = 0, z \neq 0 \text{ برای } \phi_2(z) = 1/z, U_2 = \mathbb{C} \setminus \{0\} \cup \{\infty\}.$$

تابع گذار روی $U_1 \cap U_2 = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ برابر است با $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(z) = 1/z$ ، که هولومورفیک

(در هر نقطه از دامنه اش مشتق پذیر و تحلیلی باشد) است. این سطح متراکم است، بنابراین

همه توابع هولومورفیک آن ثابت هستند.

(ج) سطح ریمان برای $\sqrt{z}$: تابع $w = \sqrt{z}$ چندمقداری است، با دو مقدار برای هر $z \neq 0$.

سطح ریمان شامل دو نسخه از $\mathbb{C}$ است که در محور حقیقی منفی شکاف داده شده‌اند و

در شکاف به صورت صلیبی به هم چسبانده شده‌اند. گردش اطراف مبدأ (نقطه شاخه در

$z = 0$) باعث انتقال بین ورق‌ها می‌شود و پیوستگی را تضمین می‌کند.

(د) سطح ریمان برای $\log z$: لگاریتم $w = \log z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi)$ ، $k \in \mathbb{Z}$ ، بی‌نهایت چندمقداری است. سطح ریمان یک مارپیچ گون با ورق‌های بی‌نهایت است، که هر ورق به یک k متفاوت مربوط است. یک دور کامل اطراف مبدأ به ورق بعدی منتقل می‌شود و $2\pi i$ به بخش موهومی اضافه می‌کند.

۵.۱۰.۴ کاربردها و نتایج

سطوح ریمان در چندین حوزه حیاتی هستند:

- **تحلیل مختلط:** آنها دامنه‌ای طبیعی برای توابع چندمقداری فراهم می‌کنند، که ادامه تحلیلی را فراتر از دامنه‌های ساده ممکن می‌سازد.
- **فیزیک:** در نظریه ریسمان، سطوح ریمان ورق‌های جهانی ریسمان‌ها را مدل‌سازی می‌کنند، که جنس آن‌ها بر ویژگی‌های فیزیکی تأثیر می‌گذارد.
- **نظریه اعداد:** نیمه‌صفحه بالایی، یک سطح ریمان، برای مطالعه اشکال مدولار استفاده می‌شود، که در کاربردهای نظریه اعداد مانند قضیه آخر فرما حیاتی است.

یک نتیجه کلیدی این است که سطوح ریمان چندمقداری بودن توابعی مانند $\sqrt{z}$ و $\log z$ را با ارائه یک ساختار هندسی که هر نقطه به یک مقدار منحصر به فرد مربوط است، حل می‌کنند.

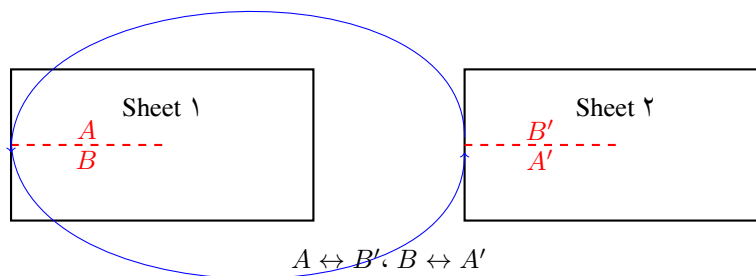
۶.۱۰.۴ زمینه تاریخی

سطوح ریمان توسط برنهارد ریمان در دهه ۱۸۵۰ برای رسیدگی به توابع چندمقداری در مطالعه تحلیل مختلط معرفی شدند. کار برجسته او، به ویژه در رساله ۱۸۵۱ خود، مفهوم سطوح را به عنوان

ابزاری برای گسترش توابع مختلط ایجاد کرد، که بر پایه‌های گذاشته شده توسط آگوستین-لویی کوشی بنا شد. مشارکت‌های بعدی توسط هرمان وایل و دیگران تعریف انتزاعی را رسمی کرد و کاربردهای آن را در هندسه جبری و فیزیک تقویت کرد.

۷.۱۰.۴ شهود

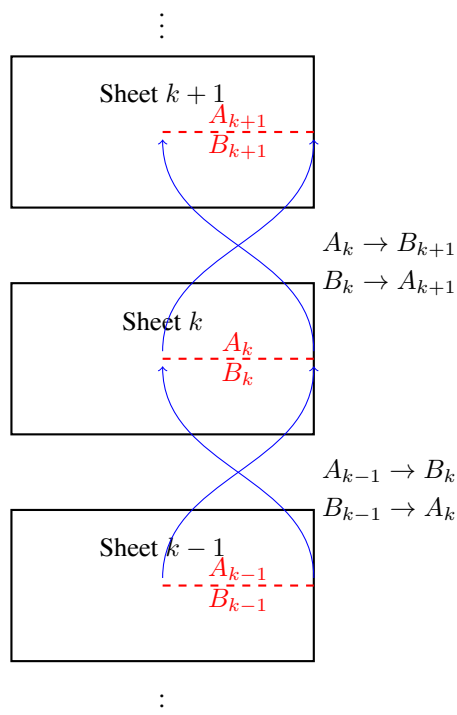
صفحه مختلط را به عنوان یک بوم صاف تصور کنید، که نقاط آن اعداد مختلط را نشان می‌دهند. برای تابع جذر دوم $w = \sqrt{z}$ ، سطح ریمان مانند دو بوم است که در محور حقیقی منفی شکاف داده شده‌اند و به صورت صلیبی به هم چسبانده شده‌اند تا یک سطح واحد تشکیل دهند. گردش اطراف مبدأ (نقطه شاخه در $z = 0$) شما را از یک ورق به ورق دیگر منتقل می‌کند، که تضمین می‌کند $\sqrt{z}$ به طور پیوسته از مثلاً $\sqrt{1} = 1$ به $\sqrt{1} = -1$ تغییر کند. برای لگاریتم $w = \log z$ ، سطح یک سطح شیب‌دار مارپیچی است، که هر ورق به یک شاخه $\log z = \ln |z| + i(\theta + 2k\pi)$ مربوط است. یک دور کامل اطراف مبدأ به ورق بعدی مارپیچ می‌کند و $2\pi i$ اضافه می‌کند. این سطوح صفحه را به یک ساختار لایه‌ای تبدیل می‌کنند، که نگاشت‌های صاف را ممکن می‌سازد و چندمقداری را حل می‌کند.



شکل ۵۲.۴: طرح شماتیک سطح ریمان برای $w = \sqrt{z}$ ، که دو صفحه را نشان می‌دهد که در امتداد برش شاخه $[-\infty, 0]$ به هم متصل شده‌اند. لبه بالایی (A) برش در صفحه ۱ به لبه پایینی (B') در صفحه ۲ متصل می‌شود، و بالعکس (A' به B).



شکل ۵۳.۴: دایره $|z| = 1$ در صفحه z تحت تبدیل $w = \sqrt{z}$ (شاخه اصلی) به یک نیم‌دایره در صفحه w نگاشت می‌شود، از $w = 1$ تا $w = -1$ از طریق نیم‌صفحه بالایی، که نقطه انشعاب در $z = 0$ را نشان می‌دهد.



شکل ۵۴.۴: طرح شماتیک سطح ریمان برای $w = \log z$ ، که چندین صفحه را نشان می‌دهد که در امتداد برش شاخه $[0, \infty)$ به هم متصل شده‌اند. لبه بالایی (A_k) برش در صفحه k به لبه پایینی (B_{k+1}) در صفحه $k+1$ متصل می‌شود، و لبه پایینی (B_k) به لبه بالایی (A_{k-1}) در صفحه $k-1$ متصل می‌شود، و یک هلیکوپد بی‌نهایت را تشکیل می‌دهد.

تمرین‌های زیر درک را تقویت می‌کنند، با راه‌حل‌های ارائه‌شده برای فهم بهتر:

(آ) توصیف سطح ریمان برای $w = \sqrt{z}$. راه‌حل: سطح ریمان برای $w = \sqrt{z}$ شامل دو

ورق است که در نقطه شاخه $z = 0$ به هم متصل شده‌اند. هر ورق به یک شاخه از جذر دوم مربوط است، مثلاً $\sqrt{z} = |z|^{1/2} e^{i\theta/2}$ برای $\theta \in (-\pi, \pi]$ در یک ورق، و $\theta \in (\pi, 3\pi]$ در ورق دیگر. گردش اطراف مبدأ بین ورق‌ها انتقال می‌یابد و پیوستگی را تضمین می‌کند.

(ب) توضیح ساخت سطح ریمان برای $\log z$. راه‌حل: سطح ریمان برای $\log z$ یک مارپیچ

گون بی‌نهایت با ورق‌هایی است که به شاخه‌های $\log z = \ln |z| + i(\theta + 2k\pi)$ برای $k \in \mathbb{Z}$ ، $\theta \in (-\pi, \pi]$ مربوط است. هر دور کامل اطراف مبدأ به ورق بعدی منتقل می‌شود و $2\pi i$ به بخش موهومی اضافه می‌کند، که پیوستگی را حفظ می‌کند.

(ج) نمایش اینکه صفحه ریمان یک سطح ریمان متراکم است. راه‌حل: صفحه ریمان

$\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ توسط دو نمودار پوشانده شده است: $U_1 = \mathbb{C}$ ، $\phi_1(z) = z$ ، و

$U_2 = \mathbb{C} \setminus \{0\} \cup \{\infty\}$ ، $\phi_2(z) = 1/z$ برای $z \neq 0$ ، $\phi_2(\infty) = 0$. تابع گذار

$\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(z) = 1/z$ در $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ هولومورفیک (در هر نقطه از دامنه اش مشتق پذیر و

تحلیلی باشد) است. از آنجا که صفحه متراکم است، یک سطح ریمان متراکم است.

(آ) ثابت کنید که در یک سطح ریمان متراکم، هر تابع هولومورفیک (در هر نقطه از دامنه اش

مشتق پذیر و تحلیلی باشد) ثابت است، با استفاده از اصل حداکثر مدول.

۱۱.۴ سطوح ریمان برای توابع مرتبط

(ب) جنس یک سطح ریمان و ارتباط آن با تعداد دسته‌ها در ساختار توپولوژیکی آن را بحث کنید، و یک مثال برای جنس ۱ ارائه دهید.

۱۱.۴ سطوح ریمان برای توابع مرتبط

۱.۱۱.۴ تعریف

در تحلیل مختلط، «توابع مرتبط» به توابع چندمقداری اشاره دارند که از توابع ابتدایی مانند جذر دوم $(w = \sqrt{z})$ ، لگاریتم $(w = \log z)$ و دیگر توابع جبری یا متعالی مانند $w = \sqrt{z^2 - 1}$ مشتق می‌شوند. به طور رسمی، این یک فضای توپولوژیکی است که با یک اطلس از نمودارها مجهز شده است که زیرمجموعه‌های باز را به صفحه مختلط $\mathbb{C}$ نگاشت می‌کنند، با توابع گذار هولومورفیک (در هر نقطه از دامنه اش مشتق پذیر و تحلیلی باشد) بین نمودارهای همپوشان. این ساختار، چندمقداری را با ارائه ورق‌های متعدد، که هر کدام به یک شاخه از تابع مربوط است، و در نقاط شاخه به هم متصل شده‌اند، حل می‌کند.

۲.۱۱.۴ ساخت سطوح ریمان

سطوح ریمان با گرفتن چندین نسخه از صفحه مختلط، برش‌دار کردن آن‌ها در امتداد قطع شاخه‌های مناسب، و چسباندن آن‌ها به یکدیگر برای تضمین پیوستگی ساخته می‌شوند. تعداد ورق‌ها به چندمقداری تابع بستگی دارد:

• جذر دوم $(w = \sqrt{z})$: تابع $w^2 = z$ دو مقدار برای هر $z \neq 0$ دارد. سطح ریمان

۱۱.۴ سطوح ریمان برای توابع مرتبط

شامل دو ورق است، با یک نقطه شاخه در $z = 0$ و معمولاً یک قطع شاخه در امتداد محور حقیقی منفی $[-\infty, 0]$. گردش اطراف مبدأ بین ورق‌ها انتقال می‌یابد و پیوستگی را تضمین می‌کند.

• **لگاریتم** $(w = \log z)$: تابع $w = \log z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi)$ ، $k \in \mathbb{Z}$ ، بی‌نهایت چندمقداری است. سطح ریمان دارای ورق‌های بی‌نهایت است، که هر ورق به یک k متفاوت مربوط است، با یک نقطه شاخه در $z = 0$ و یک قطع در امتداد $[-\infty, 0]$. یک دور کامل اطراف مبدأ به ورق بعدی منتقل می‌شود و $2\pi i$ به بخش موهومی اضافه می‌کند.

• **جذر دوم یک چندجمله‌ای** $(w = \sqrt{z^2 - 1})$: برای $z^2 - 1$ ، با ریشه‌ها در $z = \pm 1$ ، سطح ریمان دارای دو ورق است، با نقاط شاخه در $z = 1$ ، $z = -1$ و بی‌نهایت، که معمولاً توسط یک قطع در امتداد $[-1, 1]$ به هم متصل می‌شوند.

۳.۱۱.۴ ویژگی‌های اصلی

سطوح ریمان برای توابع مرتبط ویژگی‌های کلیدی زیر را نشان می‌دهند:

(آ) **تک‌مقداری**: روی سطح ریمان، تابع چندمقداری به تابع یک‌مقداری تبدیل می‌شود، زیرا هر نقطه روی سطح به یک مقدار منحصر به فرد از تابع مربوط است.

(ب) **تحلیلی بودن**: هر شاخه از تابع روی سطح ریمان هولومورفیک (در هر نقطه از دامنه اش مشتق پذیر و تحلیلی باشد) است، به جز در نقاط شاخه، که در آن تابع ممکن است تعریف نشده یا چندمقداری باشد.

۱۱.۴ سطوح ریمان برای توابع مرتبط

(ج) نقاط شاخه و قطع‌ها: نقاط شاخه در جایی رخ می‌دهند که مقادیر تابع همگرا می‌شوند (مثلاً $z = 0$ برای $\sqrt{z}$)، و قطع‌های شاخه برای تضمین پیوستگی معرفی می‌شوند. برای مثال، قطع $[-\infty, 0]$ برای $\log z$ از ابهام در آرگمان جلوگیری می‌کند.

(د) همدیسی: تابع در سطح ریمان، دور از نقاط شاخه، همدیس (حافظ زاویه) است، که در آن مشتق غیر صفر است. برای $w = \sqrt{z}$ ، مشتق:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{z}},$$

برای $z \neq 0$ غیر صفر است.

(ه) خواص نگاشت: این سطوح نگاشت‌هایی را از دامنه‌های پیچیده به مناطق ساده‌تر ممکن می‌سازند. برای مثال، شاخه اصلی $\sqrt{z}$ ، $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ را به نیمه صفحه راست $\text{Re}(w) > 0$ نگاشت می‌کند.

۴.۱۱.۴ استخراج ویژگی‌های کلیدی

برای استخراج ویژگی تک‌مقداری، تابع $w = \sqrt{z}$ را در نظر بگیرید. معادله $w^2 = z$ دو راه‌حل برای هر $z \neq 0$ دارد. روی سطح ریمان، دو ورق ساخته می‌شوند، که هر کدام به یک شاخه مربوط است:

$$w = |z|^{1/2} e^{i\theta/2}, \quad w = |z|^{1/2} e^{i(\theta/2 + \pi)}.$$

۱۱.۴ سطوح ریمان برای توابع مرتبط

قطع شاخه در امتداد $[-\infty, 0]$ تضمین می‌کند که عبور از قطع بین ورق‌ها انتقال یابد و $\sqrt{z}$ یک مقداری بماند. مشتق:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{z}},$$

در $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ هولومورفیک (در هر نقطه از دامنه اش مشتق پذیر و تحلیلی باشد) است، که تحلیلی بودن را تأیید می‌کند. برای $w = \log z$ ، ورق‌های بی‌نهایت به:

$$w = \ln |z| + i(\theta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z},$$

مربوط هستند، با انتقال‌هایی که $2\pi i$ اضافه می‌کنند و پیوستگی را حفظ می‌کنند.

۵.۱۱.۴ مثال‌های گویا

مثال‌های زیر ساخت و رفتار سطوح ریمان را برای توابع مرتبط نشان می‌دهند:

(آ) سطح ریمان برای $w = \sqrt{z}$: تابع $w^2 = z$ دو مقدار برای هر $z \neq 0$ دارد. سطح ریمان دارای دو ورق است، با نقطه شاخه در $z = 0$ و قطع در امتداد $[-\infty, 0]$. برای $z = i$ ، در شاخه اصلی $(-\pi < \arg z \leq \pi)$:

$$w = e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i).$$

گردش اطراف مبدأ به ورق دیگر منتقل می‌شود و $w = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ را می‌دهد.

(ب) سطح ریمان برای $w = \log z$: لگاریتم دارای شاخه‌های بی‌نهایت است:

$$w = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

۱۱.۴ سطوح ریمان برای توابع مرتبط

سطح ریمان یک هلیکویید با ورق‌های بی‌نهایت است، که نقطه شاخه در $z = 0$ دارد. عبور از قطع $[-\infty, 0]$ به ورق بعدی منتقل می‌شود و $2\pi i$ اضافه می‌کند. برای $z = -1$ ، در شاخه اصلی $(\arg z = \pi)$:

$$w = \ln 1 + i\pi = i\pi.$$

(ج) سطح ریمان برای $w = \sqrt{z^2 - 1}$: تابع دارای نقاط شاخه در $z = 1$ ، $z = -1$ و بی‌نهایت است. سطح ریمان دارای دو ورق است، با قطع در امتداد $[-1, 1]$. برای $z = 2$ ، خارج از قطع:

$$w = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3} \approx 1.732,$$

با انتخاب ریشه مثبت برای شاخه اصلی.

(د) نگاشت توسط $\sqrt{z}$: شاخه اصلی $\sqrt{z}$ صفحه $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ را به نیمه‌صفحه راست $\text{Re}(w) > 0$ نگاشت می‌کند. برای نیمه‌صفحه بالایی $\text{Im}(z) > 0$:

$$z = re^{i\theta}, \quad 0 < \theta < \pi \implies w = \sqrt{r}e^{i\theta/2}, \quad 0 < \theta/2 < \pi/2,$$

که به ربع اول $\text{Re}(w) > 0$ ، $\text{Im}(w) > 0$ نگاشت می‌شود.

۶.۱۱.۴ کاربردها و نتایج

سطوح ریمان برای توابع مرتبط در چندین حوزه حیاتی هستند:

- تحلیل مختلط: آنها دامنه‌ای طبیعی برای توابع چندمقداری فراهم می‌کنند، که ادامه تحلیلی

۱۱.۴ سطوح ریمان برای توابع مرتبط

را فراتر از دامنه‌های ساده ممکن می‌سازد.

- **نگاشت‌های همدیس:** توابعی مانند $\sqrt{z}$ صفحه‌های برش خورده را به نیمه صفحه‌ها نگاشت می‌کنند، که مسائل مقدار مرزی در فیزیک، مانند الکترواستاتیک یا دینامیک سیالات، را ساده می‌کند.

- **هندسه جبری:** سطوح ریمان برای توابع جبری معادل منحنی‌های جبری مختلط هستند، که مطالعه آنها را تسهیل می‌کند.

- **انتگرال‌گیری مسیری:** قطع‌های شاخه روی سطوح ریمان برای ارزیابی انتگرال‌های شامل توابع چندمقداری، مانند در نظریه پتانسیل، حیاتی هستند.

یک نتیجه کلیدی این است که سطوح ریمان چندمقداری بودن توابع را با ارائه یک ساختار هندسی که هر نقطه به یک مقدار منحصر به فرد مربوط است، حل می‌کنند، که نگاشت‌های دقیق و کاربردها را ممکن می‌سازد.

۷.۱۱.۴ زمینه تاریخی

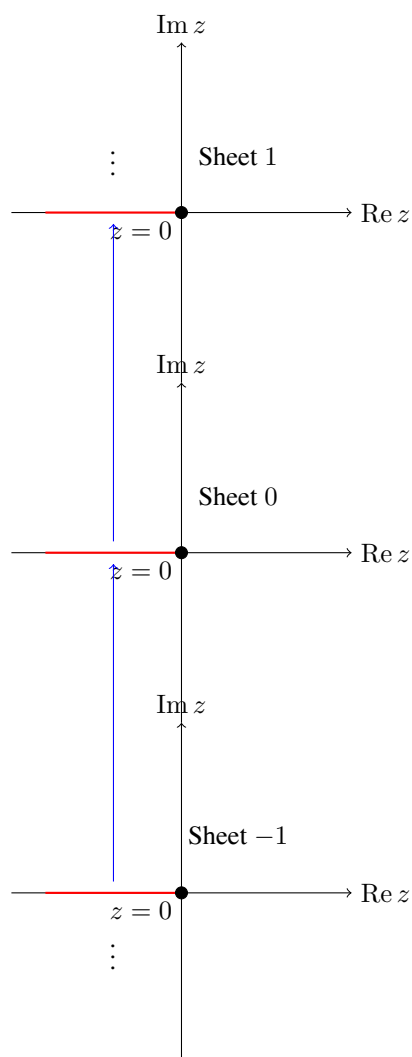
سطوح ریمان توسط برنهارد ریمان در دهه ۱۸۵۰ برای رسیدگی به توابع چندمقداری در مطالعه تحلیل مختلط معرفی شدند. کار برجسته او، به ویژه در رساله ۱۸۵۱ خود، مفهوم سطوح را به عنوان ابزاری برای گسترش توابع مختلط ایجاد کرد، که بر پایه‌های گذاشته شده توسط آگوستین-لویی کوشی بنا شد. مشارکت‌های بعدی توسط هرمان وایل و دیگران تعریف انتزاعی را رسمی کرد و کاربردهای آن را در هندسه جبری و فیزیک تقویت کرد.

۱۱.۴ سطوح ریمان برای توابع مرتبط

۸.۱۱.۴ شهود

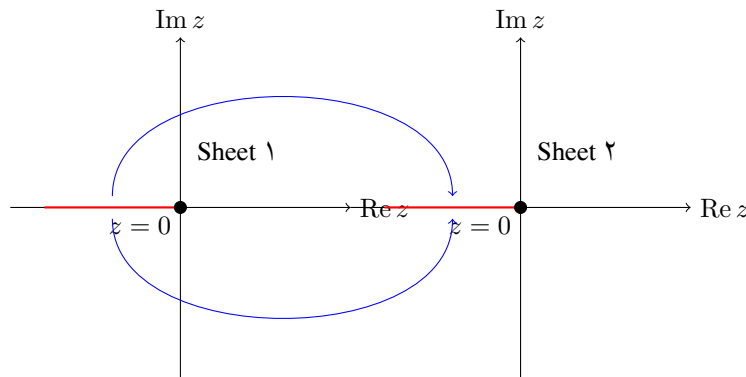
صفحه مختلط را به عنوان یک بوم صاف تصور کنید، که توسط نقاطی که تابع، مانند $\sqrt{z}$ ، چندمقداری می‌شود، علامت‌گذاری شده است. سطح ریمان برای $\sqrt{z}$ مانند دو بوم است که در محور حقیقی منفی شکاف داده شده‌اند و به صورت صلیبی به هم چسبانده شده‌اند: لبه بالایی یک شکاف به لبه پایینی دیگری متصل می‌شود و یک سطح واحد تشکیل می‌دهد. گردش اطراف مبدأ (نقطه شاخه در $z = 0$) شما را از یک ورق به ورق دیگر منتقل می‌کند، که تضمین می‌کند $\sqrt{z}$ به طور پیوسته تغییر کند، مثلاً از $\sqrt{1} = 1$ به $\sqrt{1} = -1$. برای $\log z$ ، سطح یک سطح شیب دار مارپیچی است، که هر ورق به یک شاخه $\log z = \ln |z| + i(\theta + 2k\pi)$ مربوط است. یک دور کامل اطراف مبدأ به ورق بعدی مارپیچ می‌کند و $2\pi i$ اضافه می‌کند، که چندمقداری را حل می‌کند.

۱۱.۴ سطوح ریمان برای توابع مرتبط



شکل ۵۵.۴: سطح ریمان برای $w = \log z$ شامل تعداد بی‌نهایت صفحه است که به صورت مارپیچی در امتداد برش شاخه در $(-\infty, 0]$ به هم متصل شده‌اند. پیکان‌های آبی به صفحه بعدی را هنگام عبور از برش نشان می‌دهند، به طوری که هر دور کامل حول $z = 0$ مقدار $2\pi i$ به بخش موهومی اضافه می‌کند.

۱۱.۴ سطوح ریمان برای توابع مرتبط



شکل ۵۶.۴: سطح ریمان برای $w = \sqrt{z}$ شامل دو صفحه است که در امتداد برش شاخه در $(-\infty, 0]$ به هم متصل شده‌اند. پیکان‌های آبی انتقال بین صفحات را هنگام عبور از برش نشان می‌دهند. دور زدن نقطه انشعاب در $z = 0$ صفحات را تعویض می‌کند، به عنوان مثال، از $\sqrt{1} = 1$ به $\sqrt{1} = -1$.

۹.۱۱.۴ تمرین‌ها

تمرین‌های زیر درک را تقویت می‌کنند، با راه‌حل‌های ارائه‌شده برای فهم بهتر:

(آ) توصیف سطح ریمان برای $w = \sqrt{z}$. راه‌حل: سطح ریمان برای $w = \sqrt{z}$ شامل دو

ورق است که در نقطه شاخه $z = 0$ به هم متصل شده‌اند. هر ورق به یک شاخه از جذر دوم

مربوط است، مثلاً $\sqrt{z} = |z|^{1/2} e^{i\theta/2}$ برای $\theta \in (-\pi, \pi]$ در یک ورق، و $\theta \in (\pi, 3\pi]$

در ورق دیگر. گردش اطراف مبدأ بین ورق‌ها انتقال می‌یابد و پیوستگی را تضمین می‌کند.

(ب) توضیح ساخت سطح ریمان برای $\log z$. راه‌حل: سطح ریمان برای $\log z$ یک هلیکویید

بی‌نهایت با ورق‌هایی است که به شاخه‌های $\log z = \ln |z| + i(\theta + 2k\pi)$ برای $k \in \mathbb{Z}$

مربوط است. هر دور کامل اطراف مبدأ به ورق بعدی منتقل می‌شود و $2\pi i$ به بخش

موهومی اضافه می‌کند، که پیوستگی را حفظ می‌کند.

(ج) توصیف سطح ریمان برای $w = \sqrt{z^2 - 1}$. راه‌حل: تابع دارای نقاط شاخه در $z = 1$

و $z = -1$ بی‌نهایت است. سطح ریمان دارای دو ورق است، با قطع در امتداد $[-1, 1]$.

۱۱.۴ سطوح ریمان برای توابع مرتبط

گردش اطراف هر نقطه شاخه بین ورق‌ها انتقال می‌یابد.

(د) محاسبه $\log(-1)$ در شاخه اصلی سطح ریمان برای $\log z$. راه‌حل: برای $z = -1$ ،
 $\arg(-1) = \pi$ در شاخه اصلی $(-\pi < \arg z \leq \pi)$:

$$\log(-1) = \ln 1 + i\pi = i\pi.$$

(ه) نگاشت نیمه‌صفحه بالایی تحت $w = \sqrt{z}$ با استفاده از شاخه اصلی. راه‌حل: برای
 $0 < \theta < \pi, z = re^{i\theta}$

$$w = \sqrt{r}e^{i\theta/2}, \quad 0 < \theta/2 < \pi/2,$$

که به ربع اول $\operatorname{Re}(w) > 0, \operatorname{Im}(w) > 0$ نگاشت می‌شود.

۱۰.۱۱.۴ تمرین‌های دشوارتر

(آ) ساخت سطح ریمان برای $w = \sqrt{z(z-1)(z-2)}$ و شناسایی نقاط شاخه و قطع‌های آن.

(ب) تحلیل سطح ریمان برای $w = \log(z^2 - 1)$ و توصیف تفاوت آن با سطح $\log z$.

فصل ۵

منابع

<https://www.math.utoronto.ca/~jeffrey/matd34/churchillbrown.pdf> •

<https://faculty.etsu.edu/gardnerr/5337/notes.htm> •

Books Google Applications, and Variables Complex •

McGraw-Hill Applications, and Variables Complex •

Archive Anna's Applications, and Variables Complex •

Formatting Note of Art Supernormal •

Wikipedia on Number Complex •

MathsIsFun on Numbers Complex •

Wikipedia on Conjugate Complex •

Cuemath on Conjugate Complex •

GeeksforGeeks on Numbers Complex of Conjugate •

Math-Only-Math on Numbers Complex Conjugate •

OneMathematicalCat on Conjugate Complex The •

Tutorials Lamar on Primer Number Complex •

Testbook on Numbers Complex of Conjugates Understanding •

Academy Khan on Numbers Complex •

- Noble Barnes on Edition 9th Applications and Variables Complex
- GeeksforGeeks – Numbers Complex of Forms Exponential and Polar
- GeeksforGeeks – Form Exponential to Number Complex a Convert to How
- forGeeks
- Vaia – Numbers Complex of Form Exponential
- Moivre de Abraham of Biography MacTutor
- MathsIsFun on Numbers Complex of Roots
- Variable Complex a of Functions
- Century 19th the in Analysis Complex of History Brief A
- variables complex several of Function
- and Variables Complex Churchill Brown of exercises all of Solutions
- Applications
- lines and exponential Complex
- Mappings as Functions Complex
- Limits Computing
- Limits
- functions complex of continuity and Analysis/Limits Complex
- Infinity at Limits
- Infinity at Point The

- I Part Infinity, at Limits
- Applications, and Variables Complex Notes Class Variables Complex
- Churchill. V. R. and Brown W. J. Edition, Ath
- Edition Ath Application And Variables Complex Churchill Brown
- ۲۰۱۵ Fall Analysis, Complex : ۱۸۵ Math
- Function a of Derivative Problems: Math Exercises Math
- Analysis Complex MATH ۲۰۱۴۲
- solutions with Exercises analysis Complex
- Calculator Derivative
- Formatting Note of Art Supernormal
- Solutions Problems – Derivatives Calculate
- Derivatives Order Higher
- Differentiation Complex
- Differentiability and Continuity Complex
- differentiability complex for condition sufficient of strength the On
- differentiability for condition sufficient and necessary A
- analyticity and Differentiability ۲.۳ review analysis complex
- Academia.edu
- Overview Function Harmonic Wikipedia:

Functions Harmonic LibreTexts: Mathematics •

Function Complex Harmonic Exchange: Stack Mathematics •

Guide Study Functions Harmonic Fiveable: •

Applications Variables Complex OpenCourseWare: MIT •

Examples and Definition Function Harmonic GeeksforGeeks: •

Notes Analysis Complex Edinburgh: of University •

Continuation Analytic •

function Analytic •

deter- uniquely is function Complex a When math.stackexchange.com •

domain? given a in mined

expansion asymptotic their by determined uniquely functions On •

functions analytic of properties Uniqueness •

Principle Reflection Schwarz •

Wikipedia on principle Reflection •

principle reflection Schwarz The •

MATD۳۴ Notes Math Open AMS •

Function Elementary •

Britannica Analysis Complex •

Function Exponential •

- Formula Euler's •
- Form Exponential •
- Notes Function Exponential •
- Exponential Complex •
- Logarithm Complex •
- Notes Logarithms Complex •
- Interactive Logarithm Complex •
- Numbers Complex of Logarithms •
- Function Logarithmic •
- Form Trigonometric •
- Functions Trigonometric Complex •
- Variables Complex of Functions •
- Functions Trig Complex •
- Functions Trigonometric •
- Functions Hyperbolic Complex •
- Workbook Functions Hyperbolic •
- Overview Function Hyperbolic •
- Function Hyperbolic •

- O'Reilly Chapter Analysis Complex •
- Dreams of Suitcase Functions Hyperbolic Complex •
- Fiveable Functions Hyperbolic and Trigonometric •
- Wikipedia Functions Hyperbolic Inverse •
- GeoGebra Interactive Logarithm Complex •
- LibreTexts Mathematics $\log(z)$ Function •
- GraphicMaths Functions Trigonometry Number Complex •
- Notes Lecture Surfaces Riemann Berkeley UC •
- Information General Surface Riemann Wikipedia •
- Notes Comprehensive Surfaces Riemann Harvard •
- Notes Reference Surfaces Riemann College Imperial •
- Explanation Detailed Transformation Möbius Wikipedia •
- Definition General Map Linear Wikipedia •
- Transformations Complex Basic LibreTexts Mathematics •
- Functions Variable Complex OpenCourseWare MIT •
- Mappings Functions Complex LibreTexts Mathematics •
- Analysis Complex in Transformation Linear Define Brainly •
- Notes Analysis Complex Introduction Chen William •

- Notes Handwritten Analysis Complex TutorialsDuniya •
- Examples Definition Surface Riemann MathWorld Wolfram •
- Section Mapping Conformal Analysis Complex •
- Tool Interactive Mappings Analysis Complex •
- Material Study Handwritten Analysis Complex Kalika P •
- Analysis Complex in Transformations Linear •
- Principle Reflection – \(\Delta\) Analysis Complex •
- analysis) (Complex Principle Reflection Schwarz's •
- Functions Harmonic : \(\cdot\) Analysis Complex •
- Functions Analytic determined Uniquely – \(\cdot\) Analysis Complex •
- Grok •
- math live Lockdown \(\cdot\) Ep. | fundamentals number Complex •
- \(\cdot\) analysis complex of Essence | numbers? complex are What •
- numbers complex of Necessity •
- Introduction] : \(\cdot\) [Part Real Are Numbers Imaginary •
- formula Euler's Visualizing •
- Arithmetic, Complex Motivation, Overview L \(\cdot\) \(\cdot\) : Analysis Complex •
- Coordinates Polar Formula Euler's •
- \(\cdot\) Analysis Complex – numbers complex of basics The •

Numbers Imaginary of Uses World Real The •

Beginners for Tutorial Full – LaTeX •

minutes ۳۰ in LaTeX Learn •

Editor LaTeX Online Overleaf, – Tutorials •

دانشگاه علم و صنعت •

دانشکده ریاضی دانشگاه علم و صنعت •

معین دینی دانشجوی کارشناسی ریاضیات و کاربردها

بهار ۱۴۰۴

این جزوه توسط معین دینی دانشجوی کارشناسی ریاضیات و کاربردها در بهار ۱۴۰۴
برای درس توابع مختلط با پروفسور اکبر دهقانزاد، تهیه گردیده است.
نشر با ذکر منبع، بلامانع است.



Bibliography